MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

28. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. APRIL 1928)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:
K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 55,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

28. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Kaluza, Th., Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen 161

Schoenberg, I., Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1 . . . 177

Kaluza, Th., Über vollmonotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion 200

Kaluza, Th., Entwickelbarkeit von Funktionen in Dirichletsche Reihen. (Erste Mitteilung) 203

Perron, O., Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung 216

Kähler, E., Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten 220

van der Corput, J. G., Beweis einer approximativen Funktionalgleichung . . . 238

van der Corput, J. G., Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktproblemen. (Zweite Mitteilung) 301

Jarník, V., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. (Zweite Mitteilung) 311

Schauder, J., Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems 317

Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen.

Von

Th. Kaluza in Königsberg.

§ 1.

Die Potenzreihe

$$\mathfrak{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \qquad (\beta_0 = 1) \tag{1}$$

habe einen von Null verschiedenen Konvergenzradius; dann läßt sich bekanntlich auch $\frac{-1}{\mathfrak{Q}(z)}$ in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad (\alpha_0 = -1) \tag{2}$$

mit nichtverschwindendem Konvergenzradius entwickeln. Die beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{Q}(z)$, die also zueinander in der Beziehung

$$\mathfrak{P}(z)\mathfrak{Q}(z) = -1 \tag{3}$$

stehen, mögen hier kurz *„reziproke Potenzreihen"* heißen. Mit Rücksicht auf das Weitere setzen wir noch

$$1 + \mathfrak{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n = \mathfrak{p}(z). \tag{4}$$

Für die Koeffizienten von $\mathfrak{P}(z)$ bzw. $\mathfrak{p}(z)$ und $\mathfrak{Q}(z)$ folgen durch Cauchysche Multiplikation nach (3) die Relationen

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \beta_1 \\
&\alpha_2 = \beta_2 - \beta_1 \alpha_1 \\
&\alpha_3 = \beta_3 - \beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2 \\
&\alpha_4 = \beta_4 - \beta_3 \alpha_1 - \beta_2 \alpha_2 - \beta_1 \alpha_3 \\
&\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots \\
&\alpha_n = \beta_n - \sum_{\nu=1}^{n-1} \beta_{n-\nu} \alpha_\nu ,
\end{aligned} \tag{5}$$

aus denen man bei gegebenen β_n die α_n rekursorisch ermitteln kann. Sind umgekehrt die α_n vorgelegt, so ergibt (5) durch einfache Umstellung

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 = \alpha_1 \\
&\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \beta_1 \\
&\beta_3 = \alpha_3 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 \\
&\beta_4 = \alpha_4 + \alpha_3 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3 \qquad (6) \\
&\cdots \\
&\cdots \\
&\beta_n = \alpha_n + \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_{n-\nu} \beta_\nu
\end{aligned}
$$

zur rekursorischen Berechnung der β_n.

Aus (6) entspringt sofort der triviale

Satz 1. *Sind alle Koeffizienten von* $\mathfrak{p}(z)$ *positiv, so gilt dies auch für die Koeffizienten von* $\mathfrak{Q}(z) = \frac{1}{1-\mathfrak{p}(z)}$.

Beispiel. $\alpha_n = 1$, d. h. $\mathfrak{p}(z) = \frac{x}{1-x}$ ergibt $\mathfrak{Q}(z) = \frac{1-x}{1-2x}$ mit $\beta_n = 2^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Umgekehrt brauchen bei positivem β_n die α_n nicht gleichfalls positiv zu sein, wie schon das einfache Beispiel: $\mathfrak{Q}(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $\mathfrak{p}(z) = 2z - z^2$ lehrt. Es liegt nun die *Frage* nahe, unter welchen *Zusatzbedingungen* dies doch wiederum der Fall ist.

Zur heuristischen Vorbereitung des diese Frage beantwortenden Satz 3 beweisen wir zunächst den speziellen

Satz 2. *Die Koeffizienten der Potenzreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n = 1 - \frac{z}{\log \frac{1}{1-z}} \qquad (7)$$

sind sämtlich positiv.

Beweis. Es handelt sich bei (7) offenbar um die zu

$$\mathfrak{Q}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = \frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}$$

gehörige Potenzreihe $\mathfrak{p}(z)$, für deren Koeffizienten nach (5) neben $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ die Rekursion gilt:

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu}{n-\nu+1} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots); \qquad (8)$$

eine Stufe zurückgeschoben lautet sie

$$0 = \frac{1}{n} - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\alpha_\nu}{n-\nu}. \qquad (9)$$

Multipliziert man (8) bzw. (9) mit $\frac{1}{n}$ bzw. $\left(-\frac{1}{n+1}\right)$, so folgt nach Addition

$$\frac{\alpha_n}{n} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha_\nu \left(\frac{1}{(n+1)(n-\nu)} - \frac{1}{n(n-\nu+1)} \right) \tag{10}$$

oder

$$\alpha_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\nu\,\alpha_\nu}{(n+1)(n-\nu)(n-\nu+1)}, \tag{11}$$

mithin eine andere Rekursionsformel, die *lediglich positive* Koeffizienten aufweist, also unmittelbar den Satz bestätigt[1]).

Nach diesem Vorbilde beweisen wir nunmehr

Satz 3. *Die Koeffizienten α_n von $\mathfrak{p}(z)$ sind sämtlich nichtnegativ, falls für jene von $\mathfrak{Q}(z)$ gilt:*

$$\beta_1 > 0 \quad \textit{und} \quad \begin{vmatrix} \beta_{n-1} & \beta_n \\ \beta_n & \beta_{n+1} \end{vmatrix} \geqq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{12}$$

(oder auch: falls $\beta_1 > 0$ und die Folge $\left(\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n}\right)$ monoton fällt).

Beweis. Zunächst hat die zweite Formulierung des Satzes stets einen Sinn; denn aus $\beta_0 = 1$, $\beta_1 > 0$ folgt wegen $\beta_0 \beta_2 \geqq \beta_1^2$ auch $\beta_2 > 0$, wegen $\beta_1 \beta_3 \geqq \beta_2^2$ wiederum $\beta_3 > 0$ usf., so daß für alle $n = 1, 2, 3 \ldots$ $\beta_n > 0$ gilt. Da $\beta_0 = 1$, hat man ferner gemäß (5) für dieselben n

$$0 = \beta_n - \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{n-\nu}\,\alpha_\nu; \tag{13}$$

dazu, um eine Stufe erhöht

$$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{n-\nu+1}\,\alpha_\nu. \tag{14}$$

Multipliziert man (13) mit $(-\beta_{n+1})$, (14) mit β_n und addiert, so entsteht

$$\beta_n \alpha_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{n} \begin{vmatrix} \beta_{n-\nu} & \beta_n \\ \beta_{n-\nu+1} & \beta_{n+1} \end{vmatrix} \alpha_\nu. \tag{15}$$

Hier sind der Voraussetzung

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} \geqq \frac{\beta_1}{\beta_2} \geqq \frac{\beta_1}{\beta_3} \geqq \ldots$$

---

[1]) Solche mir von Herrn K. Knopp vorgelegte Sonderfälle (vgl. auch K. Knopp, *Über Polynomentwickelungen im Mittag-Lefflerschen Stern durch Anwendung der Eulerschen Reihentransformation*, Acta math. **47** (1925), S. 331, sowie ähnliche Fragestellungen der Herren G. Pólya und G. Szegö (vgl. G. Pólya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz*, Math. Ann. **84** (1921), S. 160 und G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 172 gaben den Anstoß zu vorliegender Arbeit.

gemäß die Determinanten rechts niemals negativ, so daß (15) wegen $\beta_n > 0$ zusammen mit $\alpha_1 = \beta_1$ eine lineare Formel zur rekursorischen Ermittelung der α_n mit lauter nicht negativen Koeffizienten darstellt, den Satz also sofort beweist. (Falls in (12) überall „$>$“ anstatt „$\geqq$“ gesetzt wird, werden die α_n sogar sämtlich wesentlich positiv.)

Bemerkt sei noch, daß stets $\alpha_n \leqq \beta_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ausfällt, wofern nur — z. B. unter den Bedingungen des soeben bewiesenen Satzes — sämtliche β_n und α_n nicht negativ sind, wie man sogleich aus dem Rekursionssystem (5) abliest. Insbesondere haben dann $\mathfrak{P}(z)$ bzw. $\mathfrak{p}(z)$ mindestens den gleichen Konvergenzradius wie $\mathfrak{Q}(z)$; daher gilt

Satz 4. *Damit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(a_n$ *reell,* $a_0 \neq 0)$ *eine Nullstelle im Inneren des Konvergenzkreises habe, ist notwendig, daß für wenigstens ein* $k \geqq 1$

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1} \tag{16}$$

ist.

Beweis. Es sei im Gegenteil für alle $k \geqq 1$ $a_k^2 \leqq a_{k-1} a_{k+1}$; falls $a_1 = 0$, würde daraus auch $a_m = 0$ für $m = 2, 3, 4, \ldots$ folgen, $f(z)$ wäre also eine von Null verschiedene Konstante. Ist hingegen $a_1 \neq 0$, so setze man, je nachdem $\frac{a_1}{a_0} > 0$ bzw. $\frac{a_1}{a_0} < 0$, $\frac{1}{a_0} f(z)$ bzw. $\frac{1}{a_0} f(-z)$ für $\mathfrak{Q}(z)$ in Satz 3 ein; die oben über den Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(z)$ gemachte Bemerkung stünde dann dem Vorhandensein einer Nullstelle entgegen.

Man kann jetzt weiter nach *verschärften Bedingungen* fragen, unter denen die α_n nicht nur positiv sind, sondern überdies *monoton* fallen[2]). Eine Antwort gibt — wenigstens theoretisch —

Satz 5. *Ist mit* $\sigma_0 = \beta_0 = 1$ *und* $\sigma_1 = \beta_0 + \beta_1 = 1 + \alpha_1$ *für* $n = 2, 3, 4, \ldots$

$$\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_{n-1} \\ \sigma_1 & \beta_n \end{vmatrix} < 0, \tag{17}$$

dazu für dieselben n *und alle* $\varrho = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta_{\varrho-1} & \beta_\varrho \\ \sigma_0 & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \sigma_1 & \beta_n & \beta_{n+1} \end{vmatrix} \geqq 0, \tag{18}$$

so ist für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$ $\Delta \alpha_m = \alpha_m - \alpha_{m+1} \geqq 0$, *d. h. die Folge* (α_m) *fällt monoton.*

---

[2]) Vgl. Pólya, l. c. S. 160.

Beweis. Aus der Rekursion (5)

$$\beta_0 \alpha_n = -\sum_{\varrho=1}^{n-1} \beta_\varrho \alpha_{n-\varrho} + \beta_n \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

findet man für die $\Delta \alpha_n$ sofort die andere

$$\beta_0 \Delta \alpha_n = -\sum_{\varrho=1}^{n-1} \beta_\varrho \Delta \alpha_{n-\varrho} + \beta_n (1 + \alpha_1) - \beta_{n+1}$$

oder in der Bezeichnung des Satzes

$$\beta_0 \Delta \alpha_n = -\sum_{\varrho=1}^{n-1} \beta_\varrho \Delta \alpha_{n-\varrho} - \begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_n \\ \sigma_1 & \beta_{n+1} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Eine Stufe zurück ergibt sich

$$0 = -\sum_{\varrho=1}^{n-1} \beta_{\varrho-1} \Delta \alpha_{n-\varrho} - \begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_{n-1} \\ \sigma_1 & \beta_n \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Multipliziert man (19) mit $\left(-\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_{n-1} \\ \sigma_1 & \beta_n \end{vmatrix}\right)$, (20) mit $\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_n \\ \sigma_1 & \beta_{n+1} \end{vmatrix}$, so folgt nach Addition, da $\beta_0 = 1$:

$$-\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_{n-1} \\ \sigma_1 & \beta_n \end{vmatrix} \Delta \alpha_n = \sum_{\varrho=1}^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & \beta_{\varrho-1} & \beta_\varrho \\ \sigma_0 & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \sigma_1 & \beta_n & \beta_{n+1} \end{vmatrix} \Delta \alpha_{n-\varrho} \tag{21}$$

$$(n = 2, 3, 4, \ldots);$$

wegen der Zeichenvoraussetzungen für die Determinanten links und rechts ergibt sich sonach zusammen mit $\Delta \alpha_1 = -\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_1 \\ \sigma_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$ rekursorisch die Behauptung.

Fällt insbesondere die Folge (β_n) selbst monoton, und ist $\beta_1 > 0$, so ist wegen

$$\begin{vmatrix} \sigma_0 & \beta_{n-1} \\ \sigma_1 & \beta_n \end{vmatrix} = \beta_n - (1 + \beta_1)\beta_{n-1} < \beta_n - \beta_{n-1} \leqq 0 \tag{22}$$

die Bedingung (17) stets erfüllt, und es bleibt nur noch die Voraussetzung (18):

$$(1 + \beta_1) \begin{vmatrix} \beta_{\varrho-1} & \beta_\varrho \\ \beta_{n-1} & \beta_n \end{vmatrix} \geqq \begin{vmatrix} \beta_{\varrho-1} & \beta_\varrho \\ \beta_n & \beta_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Es zeigt sich jedoch, daß der soeben bewiesene Satz *praktisch kaum verwertbar* ist: Schon bei verhältnismäßig einfachen Folgen (β_n) läßt sich (18) aus technischen Gründen nicht bestätigen oder ist gar nicht erfüllt (die Bedingung (18) ist ja keineswegs notwendig!), obwohl die (α_n) monoton fallen; a fortiori gilt dies für die nach demselben Beweisschema

zu gewinnenden Sätze über *mehrfache Monotonie* der Folge (α_n). Immerhin aber deutet das Auftreten mehrreihiger Determinanten vom Hankelschen Typus auf einen Zusammenhang mit der Stieltjesschen Theorie hin und leitet weiter zu der durch numerische Durchrechnung konkreter Beispiele noch weiter gestützten *Vermutung*, daß vielleicht die *Vollmonotonie* der Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ die Vollmonotonie der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ im Gefolge haben könnte. Dies wird sich in der Tat im folgenden bestätigen.

§ 2.

Um in der soeben angedeuteten Richtung zu einem *erschöpfenden* Satze zu gelangen, erweist es sich aber als nötig, *über den Begriff der vollmonotonen Folge noch hinauszugehen.*

Zu diesem Zwecke ersetzen wir das bekannte „*Differenzenschema*" einer Folge (α_n) durch ein (in gewissem, weitläufigem Sinne analog gebautes) sog. „*Krümmungsschema*", und zwar so, daß wir an Stelle der „*k-ten Differenz*"

$$\Delta^k \alpha_n = \sum_{\varkappa=0}^{k} (-1)^\varkappa \binom{k}{\varkappa} \alpha_{n+\varkappa} \tag{23}$$

die „$(r+1)$-*te Krümmung*"

$$\mathsf{K}^{r+1}\alpha_n = \begin{vmatrix} \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r+1} & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_{n-r+1} & \alpha_{n-r+2} & \ldots & \alpha_n & \alpha_{n+1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \ldots & \alpha_{n+r-2} & \alpha_{n+r-1} \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \ldots & \alpha_{n+r-1} & \alpha_{n+r} \end{vmatrix} \tag{24}$$

einführen, also diejenige $(r+1)$-reihige Hankelsche Determinante, die in der Nebendiagonale stets das Glied α_n aufweist. Diese Krümmungen sind durch (24) zunächst nur für $r \leqq n$ erklärt; unter anderer Bezeichnung fanden sie bereits — nicht nur in der Stieltjesschen Theorie — vielfach Verwendung[3]). Für unser Ziel ist es aber von *wesentlicher Wichtigkeit*, Krümmungen $\mathsf{K}^{r+1}\alpha_n$ auch für alle ganzen $r > n$ zu definieren; wir benutzen dazu (24) mit der *Maßgabe*, daß *alle darin auftretenden* α_m *mit negativem Index gleich Null* gesetzt werden:

$$a_m = 0 \quad \text{für} \quad m = -1, -2, -3, \ldots . \tag{25}$$

Setzt man schließlich noch zur Abrundung des Ganzen für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{K}^0 \alpha_n = 1 \tag{26}$$

---

[3]) Vgl. etwa G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Berlin, Julius Springer, 1925, Bd. 2, S. 102–105; ebenda S. 305 u. 306 weitere Literatur.

und versteht unter $\mathsf{K}^1\alpha_n$ sinngemäß α_n selbst, so hat man es schließlich mit einer nach rechts und nach unten hin unendlichen Matrix $((\mathsf{K}^k\alpha_n))$ $(k = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$ zu tun, die die „*vollständige Krümmungsmatrix*“ der Folge (α_n) heißen soll.

In dieser Matrix gilt die auf Grund bekannter Determinantensätze leicht zu beweisende[4]) *Relation*

$$\mathsf{K}^{r-1}\alpha_n\,\mathsf{K}^{r+1}\alpha_n = \begin{vmatrix} \mathsf{K}^r\alpha_{n-1} & \mathsf{K}^r\alpha_n \\ \mathsf{K}^r\alpha_n & \mathsf{K}^r\alpha_{n+1} \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, 3, \ldots; \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}, \tag{27}$$

die, falls $\mathsf{K}^{r-1}\alpha_n \neq 0$, zur *rekursorischen* Berechnung der Krümmungen benutzt werden kann, wenn man noch beachtet, daß $\mathsf{K}^k\alpha_0$ sich nach der oben gegebenen Vorschrift auf das Produkt der Nebendiagonalelemente α_0 zusammenzieht, also

$$\mathsf{K}^k\alpha_0 = (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\alpha_0^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

ist.

Zur Veranschaulichung einer vollständigen Krümmungsmatrix diene ein numerisches *Beispiel*, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
-1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{72} & \frac{1}{240} & \frac{1}{600} & \frac{1}{1260} & \cdots \\
-1 & -\frac{1}{24} & \frac{1}{2160} & \frac{1}{43200} & \cdots & & \\
1 & \frac{-19}{720} & \frac{-11}{129600} & \cdots & & & \\
1 & \frac{3}{160} & \cdots & & & & \\
-1 & \cdots & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{array} \tag{29}$$

Hierin kann man nach (27) der Reihe nach die einzelnen *Zeilen* ermitteln, wenn die beiden ersten, sowie die erste Spalte vorliegen; da sich zudem (27) umschreiben läßt:

$$\mathsf{K}^r\alpha_{n-1}\,\mathsf{K}^r\alpha_{n+1} = \begin{vmatrix} \mathsf{K}^{r-1}\alpha_n\,\mathsf{K}^r\alpha_n \\ -\mathsf{K}^r\alpha_n \quad \mathsf{K}^{r+1}\alpha_n \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2, 3, \ldots; \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}, \tag{30}$$

[4]) Vgl. etwa Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie*, S. 80 u. 109.

so kann man die Krümmungen auch *spaltenweise* erhalten, falls die beiden ersten Spalten und die erste Zeile bekannt sind.

Wir setzen nun für die Koeffizientenfolgen (α_n) bzw. (β_n) zweier reziproker Potenzreihen $\mathfrak{P}(z)$ und $\mathfrak{Q}(z)$ (vgl. (3)) die beiden vollständigen Krümmungsmatrizen $((\mathsf{K}^k\alpha_n))$ bzw. $((\mathsf{K}^k\beta_n))$ an und beweisen für sie den weiterhin *fundamentalen*

Hilfssatz. *Bedeuten (α_n) bzw. (β_n) die Koeffizienten zweier reziproker Potenzreihen, so gilt allgemein*

$$\mathsf{K}^k\alpha_n = (-1)^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_k \qquad \begin{matrix}(k=0,1,2,\ldots;\\ n=0,1,2,\ldots);\end{matrix} \tag{31}$$

insbesondere ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{K}^n\alpha_n = \mathsf{K}^n\beta_n \quad \textit{und} \quad \mathsf{K}^n\alpha_{n+1} = \mathsf{K}^{n+1}\beta_n. \tag{32}$$

Der Satz besagt etwa, daß *bis auf Zeichenänderungen*, die nach „Schrägstreifen von der Breite Zwei" vor sich gehen, die Krümmungsmatrix für $\mathfrak{P}(z)$ aus der für $\mathfrak{Q}(z)$ durch *„Umstürzen"* der Matrix um die Hauptdiagonale entsteht.

Beweis: Der Satz ist bei $k = 0$ und $k = 1$ für alle n richtig: nach (28) ist ja wegen $\beta_0 = 1$ $\mathsf{K}^n\beta_0 = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, so daß gemäß (31) in der Tat $\mathsf{K}^0\alpha_n = 1$ wird; ferner ergibt die Auflösung der ersten n linearen Gleichungen des Systems (5)

$$\alpha_n = \mathsf{K}^1\alpha_n = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_1 \qquad (n=1,2,3,\ldots), \tag{33}$$

dazu noch $\alpha_0 = \mathsf{K}^1\alpha_0 = -1 = -\mathsf{K}^0\beta_1$. Ist weiter die Behauptung für alle n und $k = 1, 2, 3, \ldots, r$ richtig, so folgt ihre Geltung für $k = r+1$ in folgender Art: Führt man gemäß (31) in (27), soweit möglich, die Krümmungen von (β_n) ein, so entsteht

$$(-1)^{\left[\frac{n-r+1}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_{r-1}\mathsf{K}^{r+1}\alpha_n = \begin{vmatrix} (-1)^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]}\mathsf{K}^{n-1}\beta_r & (-1)^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_r \\ (-1)^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_r & (-1)^{\left[\frac{n-r+1}{2}\right]}\mathsf{K}^{n+1}\beta_r \end{vmatrix} \tag{34}$$

oder, unter Beachtung der Vorzeichen[5]) innerhalb der Determinante rechts, gemäß (30)

$$(-1)^{\left[\frac{n-r+1}{2}\right]}\mathsf{K}^n\beta_{r-1}\mathsf{K}^{r+1}\alpha_n = \begin{vmatrix} -\mathsf{K}^{n-1}\beta_r & \mathsf{K}^n\beta_r \\ \mathsf{K}^n\beta_r & \mathsf{K}^{n+1}\beta_r \end{vmatrix} = -\mathsf{K}^n\beta_{r-1}\mathsf{K}^n\beta_{r+1} \tag{35}$$

und daraus die Identität (31) für $k = r+1$.

[5]) Es scheint nicht möglich zu sein, durch Änderung der Bezeichnung die lästigen Vorzeichen abzuschütteln, ohne dafür an anderen Stellen Schwerfälligkeiten hereinzubekommen.

Um den so gewonnenen Hilfssatz für unsere Zwecke auszuwerten, setzen wir fest:

Definition: *Eine reelle Folge* (γ_n) *heiße „vollkonvex" bzw. „wesentlich vollkonvex", wenn für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$

(36) $\mathsf{K}^n \gamma_n \geqq 0$ *und* $\mathsf{K}^n \gamma_{n+1} \geqq 0$ *bzw.* $\mathsf{K}^n \gamma_n > 0$ *und* $\mathsf{K}^n \gamma_{n+1} > 0$ *ist.*

(Z. B. ist für die Lösbarkeit des sog. „*Momentenproblems*" notwendig und hinreichend, daß die vorgelegte Folge vollkonvex ist, wie man aus (24) unmittelbar erkennt.)

Jetzt ergibt sich mühelos der umfassende

Hauptsatz. *Dafür, daß die Koeffizientenfolge* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *von* $\mathfrak{p}(z) = 1 + \mathfrak{P}(z)$ *vollkonvex bzw. wesentlich vollkonvex sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge der Koeffizienten* $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ *von* $\mathfrak{Q}(z)$ *selbst vollkonvex bzw. wesentlich vollkonvex ist* ($\mathfrak{P}(z)$ *und* $\mathfrak{Q}(z)$ *reziprok gedacht*).

Beweis. Unter Beachtung der Tatsache, daß die erste der im Satz genannten Folgen mit dem Index *Eins* beginnt, erkennt man aus der speziellen Behauptung (32) des obigen Hilfssatzes unmittelbar, daß die für die Vollkonvexität charakteristischen Paare von „Schrägfolgen" (36) aus den beiden Krümmungsmatrizen von (α_{n+1}) bzw. (β_n) von der Reihenfolge abgesehen miteinander identisch sind, also nur gleichzeitig nicht negativ bzw. wesentlich positiv sein können.

Es bleibt nun noch die Frage zu behandeln, inwieweit sich unser Hauptsatz auf *vollmonotone* (anstatt vollkonvexe) Koeffizientenfolgen übertragen läßt. Daß dies nicht in vollem Umfange möglich ist, lehrt schon das Beispiel $\mathfrak{P}(z) = 1 - 2z$, wo zwar (α_{n+1}), nicht aber $(\beta_n) \equiv (2^n)$ vollmonoton ist.

Hier kann man zunächst zeigen:

Satz 6. *Hat* $\mathfrak{Q}(z)$ *den Konvergenzradius Eins und streben ihre Koeffizienten* β_n *vollmonoton zu Null, so gilt für die Koeffizienten* α_{n+1} *von* $\mathfrak{p}(z)$ *das gleiche.*

Beweis. Aus der Vollmonotonie von (β_n) folgt bekanntlich[6]) die Darstellung

$$\beta_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

durch ein Stieltjessches Integral über eine im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ monoton wachsende Funktion $\chi(u)$, die hier insbesondere un-

[6]) Vgl. F. Hansdorff, *Summationsmethoden und Momentfolgen I.*, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 83—109.

endlich viele Wachstumsstellen aufweist. Läge nämlich bei nur endlich vielen Wachstums- (also: Sprung-) Stellen der letzte Sprung bei Eins, so wäre (β_n) keine Nullfolge; läge er weiter links, so wäre der Konvergenzradius größer als Eins. Der unendlich vielen Wachstumsstellen wegen ist nun (β_n) *wesentlich vollkonvex*, mithin nach dem Hauptsatz auch (α_{n+1}). Auch für diese Folge ist daher das Momentenproblem durch eine monoton wachsende Funktion $\varphi(u)$ lösbar:

$$\alpha_{n+1} = \int_0^\infty u^n \, d\varphi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{38}$$

Rechts von Eins kann nun $\varphi(u)$ keine Wachstumsstelle mehr besitzen, da sonst (α_{n+1}) monoton wachsen würde, während doch α_{n+1} zu Null strebt, da (β_n) als vollmonotone Folge die Bedingungen von Satz (3) erfüllt, somit der dort gemachten Bemerkung gemäß stets $0 \leqq \alpha_n \leqq \beta_n$ gilt. Man hat also sogar

$$\alpha_{n+1} = \int_0^1 u^n \, d\varphi(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{39}$$

(α_{n+1}) ist also tatsächlich[6]) auch vollmonoton.

(Mit etwas mehr Rechnung läßt sich der Beweis auch rein algebraisch, ohne Benutzung der Stieltjesschen Theorie führen.)

Zu erledigen ist nun noch der Fall, daß $\chi(u)$ in (37) nur endlich viele Wachstumsstellen besitzt. Dann ist aber $\mathfrak{Q}(z)$ eine *rationale* Funktion von z, und es treten dann die u. a. bei [3]) einzusehenden Sätze in Kraft, aus denen sich ganz direkt ebenfalls die Vollmonotonie von (α_{n+1}), auch ohne die einschränkenden Zusatzbedingungen von Satz 6 ergibt. Somit gilt schlechthin

Satz 7. *Für die Vollmonotonie der Koeffizienten α_{n+1} von $\mathfrak{p}(z)$ ist hinreichend die Vollmonotonie der Koeffizienten β_n von $\mathfrak{Q}(z)$.*

Eine *Umkehrung* des Satzes ist allerdings, wie nochmals betont sei, nur unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen (z. B. *einfache Monotonie* der β_n oder ähnliches) möglich, doch bietet dies weniger Interesse, da es in konkreten Fällen meist leicht zu erkennen ist, ob Vollmonotonie oder nur Vollkonvexität vorliegt.

(Eingegangen am 15. Februar 1926.)

Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1.

Von

Isac Schoenberg in Jassy (Rumänien).

Die vorliegende Arbeit schließt sich an die Abhandlung von Herrn Weyl[1]) über die Gleichverteilung von Zahlen mod 1 an, und zwar werden wir hier eine Verallgemeinerung dieser Fragestellung behandeln. — Das qualitativ wesentliche an der Gleichverteilung ist das Vorhandensein einer Verteilungswahrscheinlichkeit und wir behandeln hier die Verteilung von Zahlen mod 1 nur von diesem Standpunkt aus. — Interessante Fälle einer solchen ungleichmäßigen Verteilung sind schon von den Herren Pólya[2]) und Szegö[3]) behandelt worden. Für eine eingehendere analytische Behandlung im allgemeinen Fall erscheint aber als wesentlich auch die Forderung der Stetigkeit der Verteilungswahrscheinlichkeit der Zahlen.

Unsere Aufgabe erscheint aufs engste mit dem Momentenproblem für ein endliches Intervall verknüpft, welches von Herrn Hausdorff[4]) in einer wichtigen Abhandlung behandelt worden ist.

Der Fall einer monotonen stetigen Belegungsfunktion als Lösung wurde aber darin nicht betrachtet, und da hier gerade dieser Fall erscheint, mußte ich das hier nachholen.

Diese letzte Aufgabe erscheint, im Falle des Fourierschen Momentenproblems, in enger Beziehung zu neueren Untersuchungen der Herren F. Riesz[5]), L. Neder[6]) und S. Sidon[7]) über die Fourierkoeffizienten stetiger, periodischer Funktionen von beschränkter Schwankung.

[1]) „Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", Math. Annalen **77** (1916), S. 313–352.

[2]) „Über eine neue Weise bestimmte Integrale in der analytischen Zahlentheorie zu gebrauchen", Göttinger Nachrichten 1917, S. 149–159.

[3]) Math. és. term. tud. ért. **36** (1918), S. 531. — Vgl. Pólya und Szegö, „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis", Bd. 1, II. Abschnitt, Nr. 44 und 194.

[4]) „Momentprobleme für ein endliches Intervall", Math. Zeitschr. **16**, S. 220–248.

[5]) „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung", Math. Zeitschr. **2**, S. 312–315.

[6]) „Über die Fourierkoeffizienten der Funktionen von beschränkter Schwankung", Math. Zeitschr. **6**, S. 270–273.

[7]) „Über die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung", Acta litter. ac scient. univ. Hungaricae **2**, I (1924), S. 43–46. Siehe den Zusatz am Schluß dieser Arbeit.

In den beiden letzten Paragraphen mache ich einige Anwendungen der allgemeinen Sätze.

Es sei mir noch gestattet, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. S. Sanielevici in Jassy für seine freundlichen Ratschläge bei der endgültigen Abfassung dieser Arbeit meinen Dank auszusprechen.

§ 1.

Definition der asymptotischen stetigen Verteilung mod 1 und einleitende Sätze. — Die zwei Fragestellungen.

1. Es seien

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

n reelle Zahlen, die wir uns schon mod 1 reduziert denken können, also alle der Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ angehörend.

Sollte x_{in} $(i \leqq n)$ nur von i abhängen, so sind die Zahlen (1) die ersten n Zahlen einer Zahlenfolge

$$x_1, x_2, \ldots; x_n, \ldots$$

und die Reihenfolge der Glieder ist für das folgende wesentlich.

Es sei für den Augenblick x eine feste Zahl mit $0 < x < 1$ und es sei $m_x(n)$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen (1), welche der abgeschlossenen Teilstrecke $0 \ldots x$ angehören.

Wir sagen, daß die Zahlen (1) sich für $n \to \infty$ auf der Strecke $0 \ldots 1$ *asymptotisch stetig verteilen*, wenn für jedes feste x

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m_x(n)}{n} = z(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{2}$$

vorhanden ist und, $z(0) = 0$ und $z(1) = 1$ gesetzt, die Funktion $z(x)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetig ist.

Die Funktion $z(x)$ wollen wir die *Verteilungsfunktion* der Zahlen (1) nennen.

Es folgt nach der Definition, daß $z(x)$ nie abnimmt. Derartige Funktionen $z(x)$, die für $0 \leqq x \leqq 1$ monoton und stetig sind, mit $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, wollen wir fortab kurz als Verteilungsfunktionen bezeichnen.

Dann und nur dann liegt asymptotische *Gleichverteilung* vor, wenn $z(x) = x$ ist.

Wenn wir z. B. von den mod 1 reduzierten Zahlen

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$$

ausgehen, so findet man, wie Herr Pólya gezeigt hat, für die Verteilungsfunktion

$$z(x) = \int_0^1 \frac{1 - t^x}{1 - t}\, dt.$$

2. Wir beweisen zunächst den folgenden

Satz I. *Es sei* $f(x)$ *für* $0 \leqq x \leqq 1$ *von beschränkter Schwankung und* $z(x)$ *sei nach der obigen Definition die Verteilungsfunktion der Zahlen* (1), *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{1n})+f(x_{2n})+\ldots+f(x_{nn})}{n} = \int_0^1 f(x)\,dz(x), \tag{3}$$

wo das Integral im Sinne von Stieltjes einen Sinn hat, weil wir $z(x)$ *stetig voraussetzen.*

Der Beweis ist ebenso leicht wie für den Spezialfall der Gleichverteilung, also $z(x) = x$ [8]).

Aus der Limesgleichung (2) folgt sofort, daß (3) jedenfalls für Treppenfunktionen mit endlich vielen Treppen gültig ist.

Man kann nun, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben wird, zwei derartige Treppenfunktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bestimmen, daß

$$f_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x) \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1 \text{ und } \int_0^1 f_2(x)\,dz(x) - \int_0^1 f_1(x)\,dz(x) < \varepsilon.$$

Wir wollen auch fernerhin allgemein die Abkürzung

$$M_n(F) = \frac{F(x_{1n})+F(x_{2n})+\ldots+F(x_{nn})}{n}$$

für diesen Mittelwert benutzen.

Da Formel (3) für $f_1(x)$ gilt, so ist für genügend großes n

$$M_n(f_1) > \int_0^1 f_1\,dz - \varepsilon.$$

Aber $M_n(f) \geqq M_n(f_1)$ und $\int_0^1 f\,dz - \int_0^1 f_1\,dz \leqq \int_0^1 f_2\,dz - \int_0^1 f_1\,dz < \varepsilon,$

also $$M_n(f) > \int_0^1 f\,dz - 2\varepsilon \quad \text{für großes } n.$$

Von $f_2(x)$ ausgehend, erhält man die Abschätzung nach oben

$$M_n(f) < \int_0^1 f\,dz + 2\varepsilon \quad \text{für großes } n,$$

also zusammenfassend

$$\left| M_n(f) - \int_0^1 f\,dz \right| < 2\varepsilon \quad \text{für großes } n$$

und der Satz ist bewiesen.

[8]) Vgl. H. Weyl a. a. O. S. 314.

Im Satz I kann natürlich die Funktion $f(x)$ auch komplex sein, wenn nur Real- und Imaginärteil den Bedingungen genügen.

Indem wir in der Formel (3) die Funktion $f(x)$ passend spezialisieren, erhalten wir, daß für $k = 1, 2, 3, \ldots$ die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{1n}^k + \ldots + x_{nn}^k}{n} = \mu_k, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\pi i k x_{1n}} + \ldots + e^{2\pi i k x_{nn}}}{n} = \omega_k \tag{5}$$

vorhanden sind und deren Werte erhalten wir aus

$$\int_0^1 x^k \, dz(x) = \mu_k \qquad (\mu_0 = 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4'}$$

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} \, dz(x) = \omega_k \quad (\omega_0 = 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5'}$$

Diese Grenzwerte erscheinen also als Stietjes- resp. Fouriermomente der Verteilungsfunktion $z(x)$.

3. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß sich die Zahlen (1) asymptotisch stetig verteilen. Wir wollen nun diese Voraussetzung fallen lassen und wir beweisen, *daß aus den Gleichungen* (4) *auch die Existenz der Limites* ω_k, *also auch die Gleichungen* (5) *folgen. Allgemeiner, aus den Gleichungen* (4) *oder* (5) *folgt, daß der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{1n}) + f(x_{2n}) + \ldots + f(x_{nn})}{n} = L(f) \tag{6}$$

vorhanden ist, für jede für $0 \leqq x \leqq 1$ *stetige Funktion* $f(x)$.

Der Beweis ist sofort erledigt. Wir wollen etwa von den Gleichungen (4) ausgehen und zeigen, daß $L(f)$ vorhanden ist.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben.

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz kann man ein Polynom so bestimmen, daß

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + r(x)$$

und

$$|r(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1.$$

In der abkürzenden Bezeichnung von 2 folgt aus der letzten Gleichung

$$M_n(f) = a_0 + a_1 M_n(x) + \ldots + a_m M_n(x^m) + M_n(r)$$

und aus $M_n(x^k) \to \mu_k$ für $n \to \infty$ und $|M_n(r)| < \varepsilon$ folgt

$$|M_n(f) - (a_0 + a_1 \mu_1 + \ldots + a_m \mu_m)| < 2\varepsilon$$

für genügend großes n, also auch

$$|M_{n+p}(f) - M_n(f)| < 4\varepsilon \quad \text{für großes } n$$

und also ist Formel (6) bewiesen.

Man beweist dasselbe ebenso leicht, wenn man von den Gleichungen (5) ausgeht, indem man $f(x)$ durch ein trigonometrisches Polynom approximiert.

4. Wir benutzen jetzt den Zusammenhang mit dem Momentenproblem und beweisen den

Satz II. *Es mögen die Grenzwerte μ_k gemäß den Gleichungen (4) vorhanden sein ($\mu_0 = 1$) und es sei das Momentenproblem (4′) durch eine stetige monotone Funktion $z(x)$ lösbar, wobei wir $z(0) = 0$ voraussetzen dürfen.*

Unter diesen Umständen verteilen sich unsere Zahlen (1) asymptotisch stetig und es ist $z(x)$ deren Verteilungsfunktion.

Man kann genau dasselbe beweisen, wenn man von den Fouriermomenten ω_k ausgeht und $z(x)$ den Gleichungen (5′) genügt.

Es seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, dann folgt nach **3** die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} M_n(f) = L(f) \quad \text{für jedes stetige } f(x).$$

Man sieht nun leicht, daß

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\, dz(x),$$

denn nach (4) und (4′) ist diese Gleichung für jedes Polynom richtig und nach dem Approximationssatz folgt sie auch sofort für jede stetige Funktion.

Der Satz II besagt, daß für $0 < \vartheta < 1$, in der Bezeichnung von **1**,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_\vartheta(n)}{n} = z(\vartheta),$$

für jedes solche ϑ.

Wir betrachten folgende Funktion mit einem Sprung

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \vartheta, \\ 0 & \text{„ } \vartheta < x \leqq 1, \end{cases}$$

und da

$$M_n(v) = \frac{m_\vartheta(n)}{n} \quad \text{und} \quad \int_0^1 v(x)\, dz(x) = z(\vartheta),$$

so genügt es zu beweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} M_n(v) = L(v) = \int_0^1 v(x)\, dz(x).$$

Es sei $\varepsilon > 0$ fest, genügend klein, damit $0 < \vartheta - \varepsilon$ und $\vartheta + \varepsilon < 1$. Es seien $\psi_+(x)$ und $\psi_-(x)$ die zwei stetigen Funktionen, welche die Streckenzüge $ACEF$ resp. $ABDF$ der Fig. 1 darstellen. Es ist

$$\psi_-(x) \leqq v(x) \leqq \psi_+(x), \quad \text{also} \quad M_n(\psi_-) \leqq M_n(v) \leqq M_n(\psi_+).$$

Für $\delta > 0$ fest folgt also (ψ_+ und ψ_- sind stetig!)

$$\int_0^1 \psi_-(x)\, dz(x) - \delta < M_n(v) < \int_0^1 \psi_+(x)\, dz(x) + \delta$$

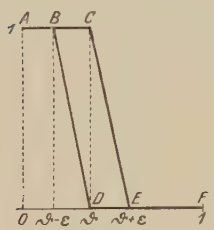

Fig. 1.

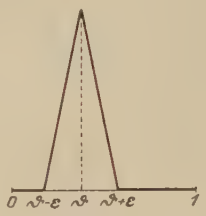

Fig. 2.

für genügend großes n und es folgt daraus die Existenz des Grenzwertes von $M_n(v)$ und aus $\int \psi_- dz \leqq \int v\, dz \leqq \int \psi_+ dz$ [9]) auch sein Wert

$$\int_0^1 v\, dz(x),$$

wenn wir zeigen können, daß die Differenz

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^1 \psi_+(x)\, dz(x) - \int_0^1 \psi_-(x)\, dz(x)$$

für genügend kleines ε auch beliebig klein wird.

Es sei $\psi(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$ (Fig. 2), so folgt

$$\Delta_\varepsilon = \int_0^1 \psi(x)\, dz(x) = \int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \psi(x)\, dz(x) = -\int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} z(x)\, d\psi(x)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\vartheta}^{\vartheta-\varepsilon} z(x)\, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\vartheta}^{\vartheta+\varepsilon} z(x)\, dx$$

und dieser letzte Ausdruck strebt für $\varepsilon \to 0$ gegen $-z(\vartheta - 0) + z(\vartheta + 0)$, also gegen Null, denn $z(x)$ ist stetig. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Man kann nun zwei verschiedene Fragestellungen verfolgen:

A. *Es sei eine Verteilungsfunktion* $z(x)$ [10]) *a priori gegeben.*

[9]) Diese Ungleichungen gelten, weil $z(x)$ auch monoton und nie abnehmend ist.

[10]) Diese Funktion sei also für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig, monoton $z(0) = 0$, $z(1) = 1$, siehe **1**.

Es sollen Kriterien aufgestellt werden, welche die asymptotische Verteilung unserer Zahlen (1) *nach der Funktion* $z(x)$ *gewährleisten.*

B. *Man finde Kriterien, welche uns überhaupt eine asymptotische stetige Verteilung der Zahlen* (1) *erkennen lassen, wo also die Verteilungsfunktion nicht von vornhinein gegeben wird, sondern beliebig sein kann und erst hinterher durch die Zahlen* (1) *bestimmt wird.*

Es ist natürlich die zweite Fragestellung interessanter, denn wenn man von (auf irgend eine Weise) bestimmten Zahlen (1) ausgeht (wie z. B. $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n}$ mod 1), so ist doch zunächst gewiß $z(x)$ ganz unbekannt.

6. Wir wollen zunächst die Fragestellung A erledigen, auf welche man mit Hilfe des Satzes II auf verschiedene Arten eingehen kann.

Für $z(x) = x$ entsteht die Frage nach der Gleichverteilung der Zahlen (1), wofür die Gleichungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2\pi i k x_{1n}} + e^{2\pi i k x_{2n}} + \ldots + e^{2\pi i k x_{nn}}}{n} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

notwendig und hinreichend sind[11]).

Im allgemeinen Fall eines gegebenen $z(x)$ sind notwendig und hinreichend für die Verteilung der Zahlen (1) nach $z(x)$, entweder die Gleichungen (4) *oder* diejenigen (5) für $k = 1, 2, 3, \ldots$, wobei die entsprechenden Zahlen μ_k und ω_k aus (4′) und (5′) zu entnehmen sind, denn alle Bedingungen des Satzes II sind damit erfüllt.

Man kann den Bedingungen auch eine andere Gestalt geben.

Es sei $$Q_0(x) \equiv 1, \; Q_1(x), \; Q_2(x), \; \ldots$$

eine Folge von Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 1$ stetig sind und den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^1 Q_m(x)\, Q_n(x)\, dz(x) = 0 \quad . \quad (m \neq n, \; m \geqq 0, \; n \geqq 0)$$

genügen. Es sei außerdem möglich, irgend eine stetige Funktion durch lineare Aggregate der $Q_n(x)$ mit konstanten Koeffizienten beliebig genau gleichmäßig zu approximieren.

Eine solche Funktionenfolge bilden z. B. die durch diese Bedingungen bis auf konstante Faktoren eindeutig bestimmten sogenannten Stieltjesschen Polynome von $z(x)$.

---

[11]) H. Weyl a. a. O. Satz 1, S. 315.

Notwendig und hinreichend für die Verteilung der Zahlen (1) *nach* $z(x)$ *sind dann die Bedingungen*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_k(x_{1n})+Q_k(x_{2n})+\ldots+Q_k(x_{nn})}{n}=0 \quad (\text{für } k=1,2,3,\ldots).$$

Auf den Beweis, der sofort aus dem Weierstraßschen Approximationssatz und dem Satz II folgt, will ich nicht mehr eingehen.

§ 2.

Kriterien für asymptotische stetige Verteilung mit Hilfe der Stieltjesmomente μ_k.

7. Wir haben in **3.** bewiesen, daß aus den Gleichungen (4) oder (5) auch die Gleichung (6) für jede stetige Funktion $f(x)$ folgt. Wir fassen nun die Operation $L(f)$ ins Auge unter Voraussetzung der Gleichungen (4).

Sie ist offenbar linear, das heißt $L(af+b\varphi)=aL(f)+bL(\varphi)$, und auch beschränkt. Denn aus

$$|M_n(f)| \leqq \operatorname*{Max}_{0\leqq x\leqq 1} |f(x)| = \mathfrak{M}$$

folgt auch

$$|L(f)| \leqq \mathfrak{M}.$$

Nach einem wichtigen Satz von Herrn F. Riesz[12]) kann man nun folgern, daß es eine monotone Funktion $z(x)$ gibt, so daß für jedes stetige $f(x)$

$$L(f)=\int_0^1 f(x)\,dz(x).$$

Wir setzen $z(0)=0$. Dann ist natürlich $(f\equiv 1)$ $z(1)=1$ und die Funktion $z(x)$ nimmt also nie ab.

Es sind also die Momentenprobleme $(4')$ *und* $(5')$ *mit Hilfe einer monotonen Funktion* $z(x)$ *lösbar*[13]).

Um aus dem Satz II zu folgern, daß sich unsere Zahlen (1) asymptotisch stetig verteilen, haben wir noch *die Stetigkeit* der auf diese Weise gewonnenen Funktion $z(x)$ nötig, und zwar muß man, um zu brauchbaren Kriterien zu gelangen, die dazu nötigen Bedingungen in den Grenzwerten

[12]) „Démonstration nouvelle d'un théorème concernant les opérations fonctionelles linéaires", Annales de l'école normale 3e série **31** (1914) S. 9—14.

Aus dem Satz von Herrn Riesz folgt zunächst, daß $z(x)$ von beschränkter Schwankung ist, aber man ersieht aus seinem Beweis a. a. O., daß, wenn immer $L(f)\geqq 0$ für $f(x)\geqq 0$ $(0\leqq x\leqq 1)$, die Funktion $z(x)$ sogar monoton ist.

Hier ist diese Zusatzbedingung natürlich erfüllt.

[13]) Man bemerkt sofort, daß die Zahlen μ_k eine total monotone Folge bilden und dann folgt dasselbe Ergebnis auch aus einem Satz von Herrn Hausdorff.

Die Umkehrung ist auch richtig, daß heißt: wenn die total-monotone Folge μ_k $(\mu_0=1)$ gegeben ist, so gibt es entsprechende Zahlen (1), so daß (4) gilt.

μ_k oder in den ω_k ausdrücken. Die Untersuchung gestaltet sich ganz verschieden, je nachdem man von den μ_k oder den ω_k Gebrauch macht und wir wollen mit den ersteren beginnen.

8. Wir gehen also jetzt von der Funktion $z(t)$ aus, und zwar sei sie für $0 \leqq t \leqq 1$ monoton mit $z(0) = 0$ und $z(1) = 1$ und wir bilden ihre Momente

$$\int_0^1 t^k \, dz(t) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Wir betrachten auch das Integral

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dz(t)}{1 - xt} \tag{9}$$

und man sieht sofort, daß es eine, in der von 1 bis $+\infty$ längst der reellen Ache aufgeschlitzten x-Ebene, reguläre analytische Funktion darstellt.

Aus (8) und (9) folgt die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n \qquad \text{für} \quad |x| < 1. \tag{10}$$

Wir verwerten die durch (10) gegebene Funktion und beweisen den

Hilfssatz I. *Damit die monotone Funktion $z(t)$ für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Funktion $f(x)$ folgenden Randbedingungen genügt:*

(α) *Für jedes feste r mit $1 \leqq r < \infty$ sei*

$$\lim_{x \to r} (x - r) f(x) = 0,$$

wenn x auf irgend einem Weg[14]) *mit bestimmter Tangente, welche mit der Strecke $1 - +\infty$ nicht zusammenfällt, in r einläuft.*

(β) *Es sei*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

wenn x in irgend einer, von derjenigen der positiven reellen Achse verschiedenen Richtung[14]) *nach ∞ strebt.*

Es sei $\qquad \vartheta = \frac{1}{r}.$

Nach (9) ist

$$(1 - x\vartheta) f(x) = \int_0^1 \frac{1 - x\vartheta}{1 - xt} \, dz(t).$$

[14]) Ein Weg genügt, dasselbe folgt schon für die anderen.

Die Kurve, auf der $\frac{1}{x}$ in ϑ einläuft, bildet auch einen endlichen Winkel mit der Strecke $0-1$ und es folgt daraus, daß

$$\left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| < M$$

also beschränkt, für $0 \leqq t \leqq 1$ und $\frac{1}{x}$ auf jener festen Kurve. *Es sei $z(t)$ an der Stelle $t=\vartheta$ stetig.* Es sei auch $\vartheta < 1$.

Wenn wir die Umgebung $\vartheta-\varepsilon \ldots \vartheta+\varepsilon$ von ϑ herausschneiden ($\varepsilon > 0$ genügend klein), so strebt für $\frac{1}{x} \to \vartheta$ (auf der Kurve!) der Ausdruck

$$\left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x}-\vartheta}{\frac{1}{x}-t}\right| \to 0$$

und zwar gleichmäßig für alle Werte von t mit $|t-\delta| \geqq \varepsilon$.

Für $\frac{1}{x}$ genügend nahe an ϑ ist also

$$|1-x\vartheta| \cdot |f(x)| < \int_{\vartheta-\varepsilon}^{\vartheta+\varepsilon} \left|\frac{1-x\vartheta}{1-xt}\right| dz(t) + \varepsilon < M(z(\vartheta+\varepsilon) - z(\vartheta-\varepsilon)) + \varepsilon$$

und wird also unendlich klein für ε genügend klein da wir $z(t)$ in ϑ stetig voraussetzen. Es ist also (α) erfüllt.

Derselbe Schluß gilt auch für $\vartheta = 1$.

Es sei $z(t)$ an der Stelle $t=\vartheta$ unstetig mit dem Sprung σ.

Wir betrachten die Funktion $z_1(t)$, die für $t=\vartheta$ stetig ist:

$$z_1(t) = z(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < \vartheta \quad \text{und} \quad z_1(t) = z(t) - \sigma \quad \text{für} \quad \vartheta < t \leqq 1.$$

Es ist dann

$$(1-x\vartheta)f(x) = \int_0^1 \frac{1-x\vartheta}{1-xt}\, dz(t) = \int_0^1 \frac{1-x\vartheta}{1-xt}\, dz_1(t) + \sigma,$$

denn das Integral ändert sich um den Sprung multipliziert mit dem Wert des Integranden an der Sprungstelle, hier gleich 1.

Da z_1 in ϑ stetig ist, so strebt, wie schon bewiesen, das Integral der rechten Seite gegen Null und $(1-x\vartheta)f(x) \to \sigma \neq 0$ für $\frac{1}{x} \to \vartheta$. Damit ist (α) bewiesen und der Beweis von (β) ist auch schon geführt, wenn man so wie oben mit $\vartheta = 0$ operiert.

Wenn z. B. $z(t) = t$, so ist

$$\mu_k = \int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1}$$

und

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots = -\frac{\log(1-x)}{x}$$

genügt offenbar den Bedingungen (α) und (β).

9. Um diesen Hilfssatz zu verwerten, benötigen wir auch die Funktion

$$\Phi(s) = \int_0^1 t^s \, dz(t) \quad \text{für} \quad \Re s > 0 \tag{11}$$

[15]).

Wir beweisen zunächst kurz, daß $\Phi(s)$ *in der Halbebene* $\Re s > 0$ *analytisch und regulär ist.*

In der Tat sei $s = \sigma + i\lambda$ fest $(\sigma > 0)$ und $0 < |h| < \frac{\sigma}{2}$.

Es ist

$$\frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) = \int_0^1 \left(\frac{t^h - 1}{h} - \lg t \right) t^{\sigma + i\lambda} \, dz(t),$$

also

$$\left| \frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) \right| \leqq \int_0^1 \left| \frac{t^h - 1}{h} - \lg t \right| \cdot t^\sigma \, dz(t).$$

Für $0 < t \leqq 1$ ist aber

$$\left| \frac{t^h - 1}{h} - \lg t \right| = \left| \frac{e^{h \lg t} - 1}{h} - \lg t \right| = \left| \frac{h}{2!} \lg^2 t + \frac{h^2}{3!} \lg^3 t + \ldots \right|$$

$$\leqq |h| \lg^2 t \left(1 + \frac{|h|}{1!} \lg \frac{1}{t} + \frac{|h|^2}{2!} \lg^2 \frac{1}{t} + \ldots \right) = |h| \lg^2 t \, e^{|h| \lg \frac{1}{t}}$$

$$= |h| \cdot t^{-|h|} \lg^2 t \leqq |h| \cdot t^{-\frac{\sigma}{2}} \lg^2 t,$$

weil

$$|h| < \frac{\sigma}{2}.$$

Also ist

$$\left| \frac{\Phi(s+h) - \Phi(s)}{h} - \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t) \right| \leqq |h| \cdot \int_0^1 t^{\frac{\sigma}{2}} \lg^2 t \, dz(t)$$

und für $h \to 0$ erhält man $\Phi'(s) = \int_0^1 t^s \lg t \, dz(t)$ und $\Phi(s)$ ist regulär nach dem Satz von Goursat.

Aus (11) *folgt auch sofort* $|\Phi(s)| \leqq 1$.

Diese Funktion besitzt auch noch folgende Eigenschaft:

---

[15]) $t^s = e^{s \lg t}$, $\lg t$ reell.

Für $\sigma \to +0$ strebt $\Phi(\sigma + i\lambda)$ gegen einen Grenzwert, den wir mit $\Phi(i\lambda)$ bezeichnen, und zwar gleichmäßig für $-\infty < \lambda < +\infty$, $\Phi(i\lambda)$ ist also eine stetige Funktion von λ.

Zum Beweis definieren wir

$$(11') \qquad \Phi(i\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} t^{i\lambda}\, dz(t) = \int_{0}^{1} t^{i\lambda}\, dz(t)$$

als konvergentes uneigentliches Stieltjesintegral. Für den Augenblick wollen wir mit $z_1(t)$ die Funktion bezeichnen, die gleich $z(t)$ für $0 < t \leqq 1$ aber $z_1(0) = z(+0)$ (Abkürzung für $\lim_{\varepsilon \to +0} z(\varepsilon)$). Es ist dann auch

$$\Phi(i\lambda) = \int_{0}^{1} t^{i\lambda}\, dz_1(t), \qquad \Phi(\sigma + i\lambda) = \int_{0}^{1} t^{\sigma + i\lambda}\, dz_1(t) \quad \text{für} \quad \sigma > 0$$

und also

$$|\Phi(\sigma + i\lambda) - \Phi(i\lambda)| = \Big|\int_{0}^{1} t^{\sigma + i\lambda}\, dz_1(t) - \int_{0}^{1} t^{i\lambda}\, dz_1(t)\Big|$$

$$= \Big|\int_{0}^{1} (t^{\sigma} - 1)\, t^{i\lambda}\, dz_1(t)\Big| \leqq \int_{0}^{1} (1 - t^{\sigma})\, dz_1(t)$$

eine von λ unabhängige Schranke, welche für $\sigma \to 0$ auch gegen Null strebt, weil $z_1(t)$ für $z = 0$ stetig ist.

Es gilt also die Darstellung (11) in der ganzen Halbebene auch für $\sigma = 0$, aber in diesem Fall ist das Integral im Sinne $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}$ zu nehmen.

Für $s = 0$ ist also

$$\Phi(0) = z(1) - z(+0) = 1 - z(+0),$$

so daß $\Phi(0) = 1$ notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von $z(t)$ an der Stelle $t = 0$ ist.

10. Wir wollen auch die Bedingungen für die Stetigkeit von $z(t)$ für $0 < t \leqq 1$ mit Hilfe der Funktion $\Phi(s)$ ausdrücken.

Die Bedingung (α) des Hilfssatzes I benutzt die Werte von $f(x)$ für Argumente x, die außerhalb des Konvergenzbereiches $|x| < 1$ von (10) liegen, und wir werden zum Ziel gelangen, wenn wir die analytische Fortsetzung des Funktionselementes (10) mit Hilfe von $\Phi(s)$ ausführen.

Nach (10) und (11) ist

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)\, x^n$$

und da $\Phi(s)$ für $\Re s > 0$ regulär und daselbst absolut $\leqq 1$ ist, so kann man hier einen allgemeineren Satz von Le Roy und Lindelöf benützen, den ich dem Buch „Calcul des Résidus“[16]) von Herrn Lindelöf entnehme

[16]) Paris 1905, S. 109—112, insbesondere Formel (4) auf S. 111. — Was dort $\varphi(z)$ ist, heißt hier $\Phi(z)$ und in unserem Spezialfall ist $\vartheta = 0$ und $m = 1$ zu nehmen.

und erhält sofort die Darstellung

$$f(x) = 1 + \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz \qquad (0 < \alpha < 1)$$

für $|x| > 0$ und $0 < \arc x < 2\pi$, $(x^z = e^{z \lg x},\ \lg x = \lg|x| + i \arc x)$.

Da $\Phi(\sigma + i\lambda)$ gleichmäßig in λ gegen $\Phi(i\lambda)$ strebt, für $\sigma \to 0$, so dürfen wir in dieser Formel den Integrationsweg $\Re z = \alpha$ mit der imaginären Achse vertauschen und erhalten

$$(12) \qquad f(x) = 1 + \int_{-\infty i}^{\infty i}{}' \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}\, dz$$

in demselben Bereich für x, wobei der Strich am Integral andeuten soll, daß wir den Pol im Nullpunkt längs des Halbkreises

$$z = \varkappa e^{i\omega}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2} \qquad (0 < \varkappa < 1)$$

umgehen.

Das Integral (12) konvergiert natürlich absolut, wie man sofort einsieht, weil wir $0 < \arc x < 2\pi$ festgesetzt haben.

11. Es sei nun $x = r e^{i\vartheta}$, r fest $1 \leqq r < \infty$ und $0 < \vartheta < 2\pi$. Dann ist

$$\lim_{\vartheta \to +0} \frac{|x - r|}{\vartheta} = r$$

und die Bedingung (α) von Hilfssatz I ist mit

$$(13) \qquad \lim_{\vartheta \to +0} \vartheta \cdot f(r e^{i\vartheta}) = 0$$

gleichwertig.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi(z) = \frac{\Phi(z)\, x^z}{1 - e^{2\pi i z}}$$

und dann folgt aus (12)

$$(14) \quad \vartheta f(r e^{i\vartheta}) = \vartheta + \vartheta \cdot \int_{-\infty i}^{-\varkappa i} \varphi(z)\, dz + \vartheta \cdot \int_{\text{n. d. Halbkreis}} \varphi(z)\, dz + \vartheta \cdot \int_{\varkappa i}^{\infty i} \varphi(z)\, dz.$$

Wir wollen die zwei ersten Integrale abschätzen:

$$\left| \int_{-\infty i}^{-\varkappa i} \varphi(z)\, dz \right| = \left| \int_{-\infty}^{-\varkappa} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda \right| = \left| \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(-i\lambda)\, e^{\lambda\vartheta - i\lambda \lg r}}{1 - e^{2\pi\lambda}}\, d\lambda \right|$$

$$\leqq \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{e^{\vartheta\lambda}}{e^{2\pi\lambda} - 1}\, d\lambda < \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi}{2}\lambda}}{e^{2\pi\lambda} - 1}\, d\lambda \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

also eine von ϑ unabhängige Schranke.

Für $x = r e^{i\vartheta}$, $z = \varkappa e^{i\omega}$ ist $|x^z| = e^{\varkappa(\lg r \cdot \cos\omega - \vartheta \sin\omega)}$ also, für unsere Werte von r und ϑ ist

$$|x^z| \leqq e^{\varkappa(\lg r + \vartheta)}.$$

Folglich ist

$$\left| \int_{\text{n. d. Hkr.}} \varphi(z)\, dz \right| = \int_{\text{n. d. Hkr.}} \frac{e^{\varkappa\left(\lg r + \frac{\pi}{2}\right)}}{|1 - e^{2\pi i z}|} \cdot |dz| \quad \text{für} \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

wieder eine von ϑ unabhängige Schranke.

Aus (14) folgt also (13), wenn auch das letzte Glied auf der rechten Seite von (14) für $\vartheta \to 0$ gegen Null strebt, also

$$\lim_{\vartheta \to +0} \vartheta \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda = 0.$$

Wir ersetzen λ durch $\frac{\lambda}{\vartheta}$ und haben

$$\left| \vartheta \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi(i\lambda)\, e^{-\lambda\vartheta + i\lambda \lg r}}{1 - e^{-2\pi\lambda}}\, d\lambda \right| = \left| \int_{\vartheta\varkappa}^{\infty} \frac{\Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right) e^{-\lambda + i\frac{\lambda}{\vartheta}\lg r}}{1 - e^{-2\pi\frac{\lambda}{\vartheta}}}\, d\lambda \right| \leqq \int_{\varkappa\vartheta}^{\infty} \frac{\left|\Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right)\right| e^{-\lambda}}{1 - e^{-2\pi\varkappa}}\, d\lambda$$

$$\leqq \frac{1}{1 - e^{-2\pi\varkappa}} \int_{0}^{\infty} \left|\Phi\left(i\frac{\lambda}{\vartheta}\right)\right| e^{-\lambda}\, d\lambda.$$

In dieser letzten Schranke ist r ganz fortgefallen, so daß die Bedingung (α) des Hilfssatzes gewiß erfüllt ist, wenn $\left(k = \frac{1}{\vartheta}\right)$

$$\lim_{k \to \infty} \int_{0}^{\infty} |\Phi(i\lambda k)|\, e^{-\lambda}\, d\lambda = 0. \tag{15}$$

Wir wollen der Gleichung (15) eine bequemere Form geben.

Aus $|\Phi(i\lambda)| \leqq 1$ folgt, daß das uneigentliche Integral in (15) gleichmäßig in bezug auf k konvergiert, so daß zum Bestehen von (15) hinreichend ist, daß

$$\int_{0}^{l} |\Phi(i\lambda k)|\, e^{-\lambda}\, d\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

für jeden festen Wert von $l > 0$ und diese letzte Bedingung ist auch mit

$$\int_{0}^{l} |\Phi(i\lambda k)|\, d\lambda \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

gleichwertig.

Wir ersetzen im letzten Integral λ durch $\frac{\lambda}{k}$ und erhalten

$$\frac{1}{k} \int_{0}^{lk} |\Phi(i\lambda)|\, d\lambda \to 0$$

und wenn wir $l\,k = x$ setzen

$$\frac{l}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda \to 0\,,$$

also endlich

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda = 0\,, \tag{16}$$

eine Bedingung, welche verlangt, daß $|\Phi(i\lambda)|$ im Mittel gegen Null konvergiere.

Wir bemerken nun, daß die Funktion $\Phi(s)$ nach (11) den Gleichungen

$$\Phi(n) = \mu_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt und da noch

$$|\Phi(s)| \leqq 1 \quad \text{für} \quad \Re s > 0,$$

so folgt nach einem allgemeinen Satze[17]), daß die analytische Funktion $\Phi(s)$ durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Wir erhalten zusammenfassend, indem wir Satz II heranziehen, den

Satz III. *Für die Zahlen* $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ (1) *der Strecke* $0 \ldots, 1$ *mögen die Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{1n}^k + x_{2n}^k + \ldots + x_{nn}^k}{n} = \mu_k \tag{4}$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$ *vorhanden sein.*

Es existiert eine eindeutig bestimmte für $\Re s > 0$ *reguläre und beschränkte Funktion* $\Phi(s)$, *welche den Bedingungen*

$$\Phi(n) = \mu_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

genügt.

Wenn $z(t)$ *die Lösung* $(z(0) = 0)$ *des Momentenproblems*

$$\int_0^1 t^k\,dz(t) = \mu_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu_0 = 1) \tag{4'}$$

bedeutet, so ist

$$\Phi(s) = \int_0^1 t^s\,dz(t), \qquad \Re s > 0$$

eine Darstellung der Funktion $\Phi(s)$.

Es existiert

$$\lim_{\sigma\to+0}\Phi(\sigma + i\lambda) = \Phi(i\lambda) \qquad (s = \sigma + i\lambda)$$

gleichmäßig für $-\infty < \lambda < \infty$.

---

[17]) Vgl. G. H. Hardy, „On two theorems of F. Carlson und S. Wiegert", Acta Math. **42**, S. 327—339.

Die Zahlen (1) *verteilen sich gewiß asymptotisch stetig, wenn*

$$\Phi(0)=1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x |\Phi(i\lambda)|\,d\lambda = 0. \tag{17}$$

Die entsprechende Verteilungsfunktion ist $z(t)$, *welches nach den Bedingungen* (17) *notwendig stetig ist.*

Wenn wir in der Formel (11′) von **9** die Substitution $x=\lg\frac{1}{t}$ ausführen, so erhalten wir ein Integral, mit dessen Hilfe wir das Ergebnis (16) auch so ausdrücken können:

Es sei $\psi(x)$ *eine für* $x\geqq 0$ *monotone Funktion, welche für* $x\to\infty$ *endlich bleibt, und*

$$\varrho(\lambda)=\Big|\int_0^\infty e^{i\lambda x}\,d\psi(x)\Big|,$$

wenn

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \varrho(\lambda)\,d\lambda = 0,$$

dann ist die Funktion $\varphi(x)$ *gewiß für* $x\geqq 0$ *auch stetig*[18]).

§ 3.

Kriterien für asymptotische stetige Verteilung mit Hilfe der Fouriermomente ω_k.

12. In diesem Paragraphen beweisen wir den weiter unten angeführten Satz IV.

Wir beginnen mit dem Beweis eines Hilfssatzes.

Es sei $z_0(t)$ eine für $0\leqq t\leqq 2\pi$ nie abnehmende Funktion und

$$\omega_k'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,dz_0(t). \tag{18}$$

Wir betrachten die schon von Herrn G. Herglotz[19]) benutzte Funktion

$$F(x)=\omega_0'+2\omega_1'x+2\omega_2'x^2+\dots. \tag{19}$$

Diese Potenzreihe konvergiert für $|x|<1$, und man findet leicht aus (18) und (19) die Darstellung

[18]) Unter leicht einschränkenden Nebenbedingungen kann man diesen Satz auch für die ganze reelle Achse $(-\infty<x<\infty)$ ausdehnen.

[19]) „Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis", Sächsische Sitzungsberichte **63** (1911), S. 501–511.

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+x}{e^{it}-x}\, dz_0(t) \qquad |x| < 1, \tag{20}$$

ein verallgemeinertes Poissonsches Integral.

Hilfssatz II. *Für* $0 < \vartheta < 2\pi$ *und fest ist*

$$\lim_{r \to 1} (1-r)\, F(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{\pi}\{z_0(\vartheta+0) - z_0(\vartheta-0)\}$$

und $(\vartheta = 0)$

$$\lim_{r \to 1} (1-r)\, F(r) = \frac{1}{\pi}\{z_0(+0) - z_0(0) + z_0(2\pi) - z_0(2\pi-0)\}.$$

Aus (20) folgt

$$(1-r)\, F(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(t-\vartheta)}+r}{e^{i(t-\vartheta)}-r} \cdot (1-r)\, dz_0(t),$$

und daraus folgen die Gleichungen des Hilfssatzes II nach ähnlichen Schlüssen, wie sie in 8 zum Beweis des Hilfssatzes I verwendet wurden. Die Sache ist derart einfach, daß wir dabei nicht mehr verweilen.

Insbesondere gilt:

Damit $z_0(t)$ *für* $0 \leqq t \leqq 2\pi$ *auch stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß*

$$\lim_{r \to 1} (1-r)\, F(re^{i\vartheta}) = 0 \tag{21}$$

für jedes feste ϑ *mit* $0 \leqq \vartheta < 2\pi$.

Ein bekannter Satz über Potenzreihen lautet folgendermaßen:

Die Koeffizienten der Potenzreihe

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

mögen der Gleichung $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = 0$ *genügen. Dann ist dieselbe für* $|x| < 1$ *gewiß konvergent* und

$$\lim_{r \to 1} (1-r)\, \varphi(r) = 0.$$

Indem wir diesen Satz auf die Potenzreihe (19) anwenden, folgt, daß (21) gewiß dann erfüllt ist, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\omega_1'| + |\omega_2'| + \ldots + |\omega_n'|}{n} = 0, \tag{22}$$

und *aus* (22) *folgt also a fortiori die Stetigkeit von* $z_0(t)$ *für* $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

Um zu unserer ursprünglichen Aufgabe zu gelangen, gehen wir wieder von den Zahlen (1) und den Gleichungen (5) in **2** aus. Wir sahen in **7**, daß, wenn (5) vorhanden sind, sich das Momentenproblem (4′) und also auch (5′) durch eine monotone (nie abnehmende) Funktion $z(t)$ lösen läßt. Aus (5′) folgt

$$\frac{\overline{\omega}_k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\, dz\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \omega_k',$$

wenn wir $z_0(t) = z\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ setzen, und wenn wir nun das Ergebnis (22) mit dem Satz II verbinden, so folgt, *daß*

$$(23) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_n|}{n} = 0$$

hinreichend für die asymptotische stetige Verteilung der Zahlen (1) *ist.*

Wir werden weiter noch beweisen, daß die Bedingung (23) auch notwendig ist.

13. Es sei $f(t)$ eine für $-\infty < t < \infty$ erklärte reelle Funktion mit der Periode 2π und in $0 \leqq t \leqq 2\pi$ von beschränkter Schwankung.

Es seien a_k und b_k die Fourierkoeffizienten von $f(t)$. Herr F. Riesz[20]) zeigt an einem Beispiel, daß für eine solche auch noch überall stetige Funktion $f(t)$ nicht notwendig

$$(24) \qquad \lim_{n\to\infty} n a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} n b_n = 0$$

zugleich gelten.

Herr L. Neder[21]) beweist aber umgekehrt, daß aus unseren ersten Voraussetzungen für $f(t)$ und (24) auch die Stetigkeit von $f(t)$ folgt, oder genauer, daß $f(t)$ nur hebbare Unstetigkeiten aufweisen kann.

In einer neueren Arbeit hat Herr S. Sidon[22]) bewiesen, daß, wenn unser $f(t)$ auch stetig ist, zwar nicht (24), aber gewiß

$$(25) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_1| + 2|a_2| + \ldots + n|a_n|}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|b_1| + 2|b_2| + \ldots + n|b_n|}{n} = 0$$

gelten müssen.

Wir wollen in diesem Zusammenhang zunächst beweisen, daß auch umgekehrt die Bedingungen (25) hinreichend für die Stetigkeit (hebbare Unstetigkeiten ausgenommen) von $f(t)$ sind.

---

[20]) a. a. O.
[21]) a. a. O.
[22]) a. a. O.

In der Tat sei

$$\omega_k' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,df(t).$$

Es folgt durch partielle Integration $(f(0) = f(2\pi)!)$

$$\omega_k' = \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt = \frac{i}{2}(ka_k - ikb_k) \tag{26}$$

und

$$|\omega_k'| \leqq |ka_k| + |kb_k|,$$

so daß aus (25) auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\omega_1'| + \ldots + |\omega_n'|}{n} = 0$$

folgt. Wenn wir

$$F(x) = \omega_0' + 2\omega_1' x + 2\omega_2' x^2 + \ldots$$

setzen, so folgt aus der letzten Limesgleichung und einem schon benutzten Satz, daß

$$\lim_{r\to 1}(1-r)F(re^{i\vartheta}) = 0 \tag{27}$$

für $0 \leqq \vartheta < 2\pi$. Es ist aber $f(t)$ von beschränkter Schwankung, also können wir setzen

$$f(t) = z_1(t) - z_2(t), \tag{28}$$

wo z_1 und z_2 für $0 \leqq t \leqq 2\pi$ nie abnehmen.

Es seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ die der Funktion $F(x)$ analogen, mit den Momenten von $z_1(t)$ bzw. $z_2(t)$ gebildeten Funktionen. Nach (28) folgt

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

und aus (27) erhält man

$$\lim_{r\to 1}(1-r)F_1(re^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1}(1-r)F_2(re^{i\vartheta}) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \vartheta < 2\pi.$$

Nach dem Hilfssatz II ist also für $0 < \vartheta < 2\pi$

$$z_1(\vartheta + 0) - z_1(\vartheta - 0) = z_2(\vartheta + 0) - z_2(\vartheta - 0),$$

also nach (28)

$$f(\vartheta + 0) = f(\vartheta - 0).$$

Für $\vartheta = 0$ folgt

$$\begin{aligned} &z_1(+0) - z_1(0) + z_1(2\pi) - z_1(2\pi - 0) \\ &= z_2(+0) - z_2(0) + z_2(2\pi) - z_2(2\pi - 0), \end{aligned}$$

was nach $f(0) = f(2\pi)$ und (28) auf

$$f(+0) = f(2\pi - 0)$$

herauskommt.

Die Funktion $f(t)$ kann also nur hebbare Unstetigkeiten aufweisen.

14. Wir können aus dem Satze von Herrn Sidon sehr leicht die Behauptung von **12** ableiten, welche aussagt, daß (23) nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die asymptotische stetige Verteilung der Zahlen (1) ist.

In der Tat, wenn $z(t)$ die stetige Verteilungsfunktion ist, so ist auch das dortige $z_0(t) = z\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ stetig für $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

$$f(t) = z_0(t) - \frac{1}{2\pi} t$$

ist stetig und von beschränkter Schwankung für $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Außerdem ist $f(0) = f(2\pi)$. Unter diesen Voraussetzungen ist ω_k' in (18) mit dem ω_k' in (26) identisch, also

$$|\omega_k'| \leqq |k a_k| + |k b_k| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

und da $f(t)$ stetig ist, so folgt nach den Sidonschen Gleichungen (25) auch (22) und folglich auch (23).

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden

Satz IV. *Notwendig und hinreichend für die asymptotische stetige Verteilung* mod 1 *der Zahlen* $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *ist die Existenz der Grenzwerte*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{2\pi i k x_{1n}} + e^{2\pi i k x_{2n}} + \ldots + e^{2\pi i k x_{nn}}}{n} = \omega_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_n|}{n} = 0.$$

§ 4.

Eine Anwendung des Satzes II.

15. Es seien

$$x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$$

n Zahlen der Strecke $0 \ldots 1$, die sich für $n \to \infty$ asymptotisch stetig nach $z(x)$ verteilen mögen.

Wenn $\psi(x)$ irgendeine Verteilungsfunktion ist, so folgt sofort aus Satz I, daß sich die Zahlen

$$\psi(x_{1n}), \psi(x_{2n}), \ldots, \psi(x_{nn})$$

asymptotisch stetig nach $z(\psi_{-1}(x))$ verteilen, wenn $\psi_{-1}(x)$ die Umkehrungsfunktion von $\psi(x)$ bedeutet. Insbesondere sind die Zahlen $z(x_{1n}), z(x_{2n}), \ldots, z(x_{nn})$ asymptotisch gleichverteilt für $n \to \infty$[23]).

Nicht ganz so selbstverständlich ist die Antwort auf die Frage: *Wie verteilen sich die Zahlen* $\frac{1}{x_{1n}}, \frac{1}{x_{2n}}, \ldots, \frac{1}{x_{nn}}$ mod 1? Man muß natürlich dabei voraussetzen, daß keines der $x_{\nu n}$ verschwindet.

Wir werden zeigen, daß sich diese Zahlen asymptotisch stetig mod 1 *nach der Verteilungsfunktion*

$$z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{x+n}\right) \right\}$$

verteilen.

Der allgemeinen Methode folgend, wollen wir zunächst zeigen, daß

(29)
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k^* = \int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) \\ \text{gesetzt, dann} \\ \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{e^{2\pi i \frac{k}{x_{1n}}} + e^{2\pi i \frac{k}{x_{2n}}} + \ldots + e^{2\pi i \frac{k}{x_{nn}}}}{n} = \omega_k^* \end{array} \right.$$

ist. Wir bemerken, daß diese Behauptung nicht direkt aus Satz I für $f(x) = e^{2\pi i \frac{k}{x}}$ folgt, denn diese Funktion ist in ihrem Real- und Imaginärteil von unbeschränkter Schwankung. Darum muß man etwas vorsichtig sein.

Es sei $\delta > 0$ und < 1, genügend klein, so daß $z(\delta) < 1$. Es sei m_δ die Anzahl derjenigen Zahlen $x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{nn}$, welche der Strecke $0 \ldots \delta$ angehören, und wir setzen $m'_\delta = n - m_\delta$ für die Anzahl der übrigen Zahlen.

Es sei $\varepsilon > 0$ genügend klein, so daß $z(\delta) + \varepsilon < 1$, dann folgt aus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{m_\delta}{n} = z(\delta)$, daß $\frac{m_\delta}{n} < z(\delta) + \varepsilon$ für $n > n_0(\delta, \varepsilon)$.

Da $z(\delta) + \varepsilon < 1$, so folgt $\frac{m_\delta}{n} < 1$, also $m'_\delta > 0$ für diese Werte von n. Wir haben ferner

---

[23]) Ich möchte in diesem Zusammenhang bemerken, daß wenn eine Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Zahlen der Strecke $0 \ldots 1$ gegeben ist, welche diese Strecke überall dicht bedeckt, man immer in passender Weise die Zahlen dieser Folge umordnen kann, so daß die umgeordnete Folge sich nach einer a priori beliebig gegebenen Verteilungsfunktion verteilt. Vgl. hierzu J. v. Neumann, Gleichmäßig dichte Zahlenfolgen (ungarisch), Mathematikai és Physikai Lapok **32**.

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta<x_{\nu n}} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}} = \frac{1}{n}\sum_{x_{\nu n}\leqq\delta} + \frac{1}{n}\sum_{\delta<x_{\nu n}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta<x_{\nu n}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{x_{\nu n}\leqq\delta} - \frac{m_\delta}{n}\cdot\frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta<x_{\nu n}},$$

also

$$(30)\qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta<x_{\nu n}} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}}\right| \leqq \frac{m_\delta}{n} + \frac{m_\delta}{n} < 2(z(\delta)+\varepsilon)$$

$$\text{für}\quad n > n_0(\delta,\varepsilon).$$

Man sieht nun, daß sich die Zahlen $x_{1n},\ldots,x_{nn}$, welche der Strecke $\delta\ldots 1$ angehören, auf dieser Strecke asymptotisch nach der Funktion $\frac{z(x)-z(\delta)}{1-z(\delta)}$ verteilen.

Es ist klar, was wir darunter verstehen, und daß der Satz I auch für ein solches von $0\ldots 1$ verschiedenes Intervall gilt. Daraus folgt

$$(31)\qquad \left|\frac{1}{m'_\delta}\sum_{\delta<x_{\nu n}} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}} - \frac{1}{1-z(\delta)}\int_\delta^1 e^{2\pi i\frac{k}{x}}\,dz(x)\right| < \varepsilon$$

$$\text{für}\quad n > n_1(\delta,\varepsilon)\quad (n_1 > n_0).$$

Endlich ist für ein genügend kleines $\delta < \delta_0(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^1 e^{2\pi i\frac{k}{x}}\,dz(x) - \frac{1}{1-z(\delta)}\int_\delta^1 e^{2\pi i\frac{k}{x}}\,dz(x)\right| < \varepsilon.$$

Aus dieser Ungleichung in Verbindung mit (30) und (31) folgt

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{2\pi i\frac{k}{x_{\nu n}}} - \int_0^1 e^{2\pi i\frac{k}{x}}\,dz(x)\right| < 2(z(\delta)+\varepsilon)+2\varepsilon$$

$$\text{für}\quad \delta<\delta_0(\varepsilon)\quad\text{und}\quad n>n_1(\delta,\varepsilon)$$

und (29) ist bewiesen.

16. Wir müssen also jetzt aus den Gleichungen

$$(32)\qquad \int_0^1 e^{2\pi i k x}\,dz^*(x) = \int_0^1 e^{2\pi i\frac{k}{x}}\,dz(x)\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

die Funktion $z^*(x)$ bestimmen.

Wir könnten hier nach Satz IV beweisen, daß $z^*(x)$ stetig ist, aber alles ist hier überflüssig, denn man kann leicht nachrechnen, daß

$$z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+x}\right) \right\} \quad (33)$$

[24])

diesen Gleichungen genügt. In der Tat ist

$$\int_0^1 e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{2\pi i \frac{k}{x}} dz(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i k y} dz\left(\frac{1}{n+y}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i k y} d\left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+y}\right) \right\} = \int_0^1 e^{2\pi i k y} dz^*(y)$$ [25]),

also (32) ist bewiesen.

Wenn wir insbesondere von asymptotisch gleichverteilten Zahlen ausgehen, also $z(x) = x$, so folgt aus (33)

$$z^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = c + \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt.$$

Nach dieser Funktion verteilen sich also die Zahlen

$$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{n} \bmod 1$$ [26]),

denn die inversen Zahlen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$ sind asymptotisch gleichverteilt.

Für $z(x) = x^k$ (k ganz > 1) folgt, daß sich die Zahlen

$$\sqrt[k]{\frac{n}{1}}, \sqrt[k]{\frac{n}{2}}, \ldots, \sqrt[k]{\frac{n}{n}} \bmod 1$$

nach der Funktion

$$z_k^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} \log \Gamma(x+1)$$

verteilen.

§ 5.

Anwendung auf die Verteilung der Zahlen $\frac{\varphi(1)}{1}, \frac{\varphi(2)}{2}, \frac{\varphi(3)}{3}, \ldots$ [27])

17. In diesem letzten Teil wollen wir als Anwendung des Satzes III beweisen, *daß sich diese Zahlenfolge asymptotisch stetig auf der Strecke* $0 \ldots 1$ *verteilt.*

---

[24]) Diese Reihe hat nicht negative Glieder und konvergiert gleichmäßig für $0 \leqq x \leqq 1$; denn $1 = \sum \left\{ z\left(\frac{1}{n}\right) - z\left(\frac{1}{n+1}\right) \right\}$ ist eine Majorante.

[25]) Man darf Summation und Integration vertauschen, was nach partieller Integration sofort folgt.

[26]) Vgl. G. Pólya a. a. O.

[27]) Das Symbol $\varphi(n)$ bedeutet die Eulersche Funktion.

Wir beginnen mit einer ersten Verteilungseigenschaft dieser Folge: *Sie bedeckt überall dicht die Strecke* $0 \ldots 1$.

Der Beweis ist ganz einfach. Es ist $\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ und es genügt also zu zeigen, daß die Zahlen der Gestalt

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right),$$

($p_1, p_2, \ldots, p_r$ sind verschiedene Primzahlen in irgendwelcher Anzahl), die Strecke $0 \ldots 1$ überall dicht bedecken.

Die Funktion $\log x$ ist für $x \geqq 1$ stetig und darum genügt es zu diesem Zweck zu zeigen, daß man mit den beliebigen endlichen Teilsummen, die mit Gliedern aus der Folge

$$\log\frac{2}{1},\ \log\frac{3}{2},\ \log\frac{5}{4},\ \log\frac{7}{6},\ \ldots,\ \log\frac{p}{p-1},\ \ldots$$

gebildet sind, die positive Halbachse überall dicht bedecken kann. Das folgt aber sofort aus der Divergenz der Reihe $\sum_p \log\frac{p}{p-1}$, denn wenn $x > \varepsilon > 0$ fest gegeben sind, so ist $0 < \log\frac{p}{p-1} < \varepsilon$ für $p \geqq q$ und mindestens eine Teilsumme der Reihe

$$\sum_{p \geqq q} \log\frac{p}{p-1}$$

fällt zwischen $x-\varepsilon$ und $x+\varepsilon$, denn die Reihe divergiert und ihre Glieder sind positiv und kleiner als ε.

18. Diese Eigenschaft benutzen wir im folgenden nicht, wohl aber einen Satz von Herrn Prof. J. Schur, welchen ich aus seinen Vorlesungen vom W.-S. 1923/24 kenne und der aussagt: *Für jeden komplexen Wert von s ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\varphi(1)}{1}\right)^s + \left(\frac{\varphi(2)}{2}\right)^s + \ldots + \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^s}{n} = \Phi(s) \tag{34}$$

und $\Phi(s)$ ist ganz transzendent mit der Produktdarstellung

$$\Phi(s) = \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\right\}. \tag{35}$$

p durchläuft alle Primzahlen und das Produkt (35) konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem endlichen Gebiet der s-Ebene.

Wir benutzen diesen Satz nur für positives ganzes $s = k$ und er zeigt uns, daß die Grenzwerte μ_k vorhanden sind und

$$\Phi(k) = \mu_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Außerdem ist für $s = \sigma + i\lambda$ und $\sigma \geqq 0$

$$|\Phi(s)| = \prod_p \left|1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^s\right| \leqq \prod_p \left\{1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^\sigma\right\} \leqq 1$$

und $\Phi(s)$ ist also genau die Funktion des Satzes III.

Die erste Bedingung (17) $\Phi(0) = 1$ ist offenbar erfüllt und man muß nun auch die zweite nachweisen.

Aus

$$\Phi(i\lambda) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-i\lambda \log \frac{p}{p-1}}\right)$$

folgt

$$\log|\Phi(i\lambda)| = \sum_p \log\left|1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right|$$

$$= \Re \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right).$$

Für $|x| < 1$ ist $\log(1-x) = -x + x^2 \cdot \alpha(x)$ $(\lg 1 = 0)$ und für $|x| \leqq \frac{2}{3}$ ist $|\alpha(x)| < 2$. Daraus folgt

$$\Re \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right) = \log\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{i\lambda \lg 2}\right| - \Re \sum_{p \geqq 3} \frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}$$

$$+ \Re \sum_{p \geqq 3} \frac{\left(1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}\right)^2}{p^2} \cdot \alpha\left(\frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}\right).$$

Für $p \geqq 3$ ist $\left|\frac{1 - e^{i\lambda \lg \frac{p}{p-1}}}{p}\right| \leqq \frac{2}{3}$ und die letzte Reihe auf der rechten Seite besitzt die von λ unabhängige Majorante $\sum \frac{8}{p^2}$. Also ist

$$\log|\Phi(i\lambda)| = \log\left|\cos\frac{\lambda \lg 2}{2}\right| - 2\sum_p \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right) + 0(1)$$

und endlich

$$|\Phi(i\lambda)| = \left|\cos\frac{\lambda \lg 2}{2}\right| \cdot e^{-2\sum_p \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right) + 0(1)} \tag{36}$$

für $-\infty < \lambda < +\infty$.

Die Bedingung (17) des Satzes III ist erfüllt, wenn

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-2\sum \frac{1}{p} \sin^2\left(\frac{\lambda}{2} \lg \frac{p}{p-1}\right)} d\lambda = 0.$$

Wir ersetzen λ durch $2x$ und dieze Gleichung ist à fortiori erfüllt, wenn

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_p \frac{1}{p}\sin^2\left(x\lg\frac{p}{p-1}\right)}\,dx=0. \tag{37}$$

19. Wir beweisen zunächst: *Die Zahlen der Folge*

$$\lg\frac{2}{1},\ \lg\frac{3}{2},\ \lg\frac{5}{4},\ \ldots,\ \lg\frac{p}{p-1},\ \ldots$$

sind linear unabhängig, das heißt: eine Gleichung

$$\sum c_p \log\frac{p}{p-1}=0$$

mit ganzen rationalen c_p und wo p endlich viele verschiedene Primzahlwerte durchläuft, ist nur für $c_p=0$ möglich.

Angenommen es wären nicht alle $c_p=$ Null, dann darf man $c_p\neq 0$ für alle c_p voraussetzen. Die Gleichung der Behauptung kommt auf

$$\Pi\left(\frac{p}{p-1}\right)^{c_p}=1 \quad \text{oder} \quad \Pi p^{c_p}=\Pi(p-1)^{c_p}$$

hinaus.

Es sei q der größte Primzahlwert von p. Beide Glieder der letzten Gleichung sind rationale Brüche, der erste sogar irreduzibel und q teilt seinen Nenner oder den Zähler.

Dies trifft nicht auch für den rechten Bruch ein und darum ist unsere Annahme absurd.

20. Wir können nun (37) beweisen. Es sei P eine feste Primzahl. Es ist

$$\frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_p \frac{1}{p}\sin^2\left(x\lg\frac{p}{p-1}\right)}\,dx\leqq\frac{1}{x}\int_0^x e^{-\sum_{p\leqq P} \frac{1}{p}\sin^2\left(x\lg\frac{p}{p-1}\right)}\,dx \tag{38}$$

und wir beweisen folgende zwei Behauptungen

1°. *Der Ausdruck auf der rechten Seite von* (38) *strebt für $x\to\infty$ gegen einen positiven Grenzwert $A^{(P)}$.*

2°. *Es ist* $\lim_{P\to\infty} A^{(P)}=0$.

Daraus folgt auch (37), denn wenn L den lim sup des Ausdruckes auf der linken Seite von (38) bedeutet, so folgt aus (38) und 1°.

$$L\leqq A^{(P)}$$

und P war beliebig, also nach 2° für $P\to\infty$

$$L=0$$

also (37).

Wir beginnen mit 1°. Wir betrachten die Fourierentwicklung der Funktion

$$e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z} = a_0^{(p)} + 2a_1^{(p)}\cos z + 2a_2^{(p)}\cos 2z + \ldots = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(p)} e^{izn} \quad (a_n^{(p)} = a_{-n}^{(p)})$$

und $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n^{(p)}|$ konvergiert, weil die dargestellte Funktion eine stetige zweite Ableitung besitzt[28]).

Wir ersetzen in dieser Reihenentwickelung z durch $x \log \frac{p}{p-1}$, lassen p die Werte 2, 3, 5, 7, ..., P durchlaufen und multiplizieren miteinander die herauskommenden Gleichungen.

Man erhält auf diese Weise die verallgemeinerte Fourierentwickelung

$$\psi(x) = e^{-\sum_{p \leqq P} \frac{1}{p} \sin^2\left(x \lg \frac{p}{p-1}\right)} = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu e^{i\lambda_\nu x}, \tag{39}$$

wo alle λ_ν untereinander und von 0 verschieden sind[29]).

Aus der Behauptung in **19** über die Unabhängigkeit der Zahlen $\log \frac{p}{p-1}$ folgt

$$A_0 = a_0^{(2)} a_0^{(3)} a_0^{(5)} \ldots a_0^{(P)} \tag{40}$$

und wir wollen jetzt zeigen, daß gemäß 1°.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx = A_0. \tag{41}$$

In der Tat, $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|$ ist gewiß konvergent. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann bestimmen wir m mit $\sum_{\nu=m+1}^{\infty} |A_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es folgt dann aus (39)

$$\left| \psi(x) - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu e^{i\lambda_\nu x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und also

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \frac{1}{x} \int_0^x e^{i\lambda_\nu x}\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

oder

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x \psi(x)\, dx - A_0 - \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \frac{e^{i\lambda_\nu x} - 1}{i\lambda_\nu x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

---

[28]) Vgl. L. Bieberbach, Differential- und Integralrechnung II, S. 81.

[29]) Die Funktion $\psi(x)$ ist fastperiodisch.

und also für genügend großes x $\left|\frac{1}{x}\int_0^x \psi(x)\,dx - A_0\right| < \varepsilon$ und (41) ist bewiesen. Also ist A_0 das $A^{(P)}$ von 1°. Aus (40) wird nun auch 2°. folgen.

Es ist

$$a_0^{(p)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\,dz < 1$$

und die Behauptung 2° ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß das Produkt $\prod_p a_0^{(p)}$ gegen Null divergiert, oder daß die Reihe mit positiven Gliedern

$$\sum_p (1 - a_0^{(p)})$$

divergiert.

Dies folgt nun sofort, denn für $0 \leqq x \leqq 1$ ist $1 - e^{-x} \geqq \frac{x}{2}$ und also

$$\sum_{p \leqq P}(1 - a_0^{(p)}) = \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqq P}\int_0^{\pi}\left(1 - e^{-\frac{1}{p}\sin^2 z}\right)dz \geqq \frac{1}{\pi}\sum_{p \leqq P}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 z}{2p}\,dz,$$

also

$$\sum_{p \leqq P}(1 - a_0^{(p)}) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 z\,dz \cdot \sum_{p \leqq P}\frac{1}{p}$$

und da $\sum_p \frac{1}{p}$ divergiert, ist alles bewiesen.

(Eingegangen am 7. Juli 1926.)

Zusatz bei der Korrektur (Februar 1928).

Ich nahm erst letztens davon Kenntnis, daß Herr Norbert Wiener[30]) in einer neueren Arbeit den Satz von § 3 schon bewiesen hat, und zwar in einer wenig abweichenden Gestalt.

Er benutzt statt der Sidonschen Bedingungen (25) von § 3 die Limesgleichung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2) = 0, \tag{42}$$

[30]) *"The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients"*, Journal of Math. and Phys. Massachusetts **3** (1924), pp. 72–94, insbesondere p. 81.

und zeigt, daß dieselbe *notwendig und hinreichend ist für die Stetigkeit der periodischen Funktion $f(x)$ von beschränkter Schwankung, deren Fourierkoeffizienten a_n und b_n sind.*

Es sind aber $n|a_n|$ und $n|b_n|$ beschränkt, und die Bedingung (42) erscheint gleichbedeutend mit den Bedingungen (25) infolge des einfachen Satzes:

Es sei

$$c_1, c_2, c_3, \ldots$$

eine beschränkte Folge nichtnegativer Zahlen.

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} = 0 \tag{43}$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2}{n} = 0 \tag{44}$$

und umgekehrt.

Beweis. Wir dürfen natürlich $0 \leqq c_n \leqq 1$ annehmen und dann folgt selbstverständlich (44) aus (43).

Die Umkehrung folgt aus der Ungleichung

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} \leqq \sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2}{n}},$$

einer Anwendung der Schwarzschen Ungleichung.

Es genügt nacheinander $n|a_n|$ und $n|b_n|$ für c_n zu setzen, um unsere obige Behauptung zu bekommen.

Aus demselben Grunde ist die Bedingung des Satzes IV mit der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\omega_1|^2+|\omega_2|^2+\ldots+|\omega_n|^2}{n} = 0$$

gleichbedeutend.

Über vollmonotone Folgen mit stetiger Belegungsfunktion.

Von

Theodor Kaluza in Königsberg.

In der vorangehenden Arbeit von Herrn Schönberg[1]) spielt *folgende Frage* eine wesentliche Rolle:

Wann sind die Glieder einer vollmonotonen Folge μ_n *— im Sinne von Stieltjes und Hausdorff — die Momente einer stetigen Belegungsfunktion* $\chi(u)$:

$$(1) \qquad \mu_n = \int_0^1 u^n d\chi(u); \quad \chi(u) \text{ stetig in } \langle 0, 1\rangle, \; n = 0, 1, 2, \ldots ?$$

Während Herr Schönberg die analoge Frage für *trigonometrische Momente* sehr elegant *im Reellen* beantwortet[2]), führt der Weg bei der Behandlung der oben formulierten Frage für *Potenzmomente* durchs *Komplexe*[3]).

Man kann nun, wie ich hier zeigen will, auch diese Frage recht einfach *im Reellen* erledigen, wenn man — grob gesprochen — das *asymptotische Verhalten des Differenzenschemas* von μ_n zu Rate zieht.

Es soll dies in folgendem kurz dargestellt werden.

* * *

Wie üblich, nennen wir eine Folge μ_n *vollmonoton*, wenn für alle k und n aus $0, 1, 2, \ldots$

$$(2) \qquad \Delta^k \mu_n = \sum_{\varkappa=0}^{k} (-1)^\varkappa \binom{k}{\varkappa} \mu_{n+\varkappa} \geqq 0$$

ausfällt ($\Delta^0 \mu_n = \mu_n$ gesetzt).

---

[1]) Schönberg, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 171–199.

[2]) a. a. O. S. 190.

[3]) a. a. O. S. 179.

Herr Hausdorff hat gezeigt[4]), daß die Vollmonotonie von μ_n damit gleichbedeutend ist, daß μ_n sich als *Stieltjessches Momentintegral* im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ über eine *monoton wachsende Bewegungsfunktion* $\chi(u)$ schreiben läßt:

$$(3)\quad \mu_n = \int_0^1 u^n \, d\chi(u); \quad \chi(u) \textit{ monoton wachsend in } \langle 0,1\rangle, \; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Es handelt sich nun darum, festzustellen, wann $\chi(u)$ *stetig* in $\langle 0, 1\rangle$ ist.

* * *

Wir beweisen da den

Satz. *Notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von* $\chi(u)$ *in* $\langle 0, 1\rangle$ *ist Folgendes*:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ *und jedem* ϑ $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$ *gehört mindestens ein Indexpaar* k, n *aus* $0, 1, 2, \ldots$, *so daß*

$$(5)\qquad \Delta^k \mu_n < \varepsilon (1-\vartheta)^k \vartheta^n$$

ausfällt (für $\vartheta = 1$ *bzw.* $\vartheta = 0$ *wird daraus sinngemäß* $\mu_n \to 0$ *bzw.* $\Delta^k \mu_0 \to 0$ *mit* $n \to \infty$ *bzw.* $k \to \infty$*).*

Beweis. 1. Die Bedingung ist *notwendig*: Ist nämlich zunächst $\chi(u)$ stetig in 0 und 1, so folgt bereits nach Hausdorff[5])

$$(6)\qquad \Delta^k \mu_0 \to 0 \text{ mit } k \to \infty \text{ und } \mu_n \to 0 \text{ mit } n \to \infty.$$

Ist weiter $\chi(u)$ stetig in ϑ_0 $(0 < \vartheta_0 < 1)$ und bedeutet $\theta(u)$ folgende Belegungsfunktion:

$$(7)\quad \theta(u) = 0 \text{ für } 0 \leqq u \leqq \vartheta_0, \; \theta(u) = \varepsilon \text{ für } \vartheta_0 < u \leqq 1; \; \varepsilon > 0,$$

so ist $\chi(u) - \theta(u)$ sicher *nicht mehr monoton*, da

$$(8)\quad \begin{aligned} &\lim_{u \to \vartheta_0 - 0} [\chi(u) - \theta(u)] = \chi(\vartheta_0), \quad \text{hingegen} \\ &\lim_{u \to \vartheta_0 + 0} [\chi(u) - \theta(u)] = \chi(\vartheta_0) - \varepsilon < \chi(\vartheta_0). \end{aligned}$$

Dann ist aber auch die Folge

$$(9)\qquad \int_0^1 u^n \, d[\chi(u) - \theta(u)] = \mu_n - \varepsilon \vartheta_0^n = \varrho_n$$

nach Hausdorff[4]) *nicht mehr vollmonoton*, d. h. es muß *mindestens ein Indexpaar* k, n aus $0, 1, 2, \ldots$ existieren, so daß die zugehörige Differenz

---

[4]) F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentenfolgen* I, Math. Zeitschr. 9, S. 74 ff.

[5]) a. a. O. Satz II, S. 84; dazu die Bemerkung S. 85 unten.

negativ wird:

$$\Delta^k \varrho_n = \Delta^k \mu_n - \varepsilon (1 - \vartheta_0)^k \vartheta_0^n < 0. \tag{10}$$

Da ε in (7) beliebig wählbar ist, gilt somit (5).

2. Die Bedingung ist *hinreichend*: Enthielte nämlich zunächst $\chi(u)$ in 0 bzw. 1 einen Sprung vom Ausmaße $\varepsilon > 0$, so würde schon nach Hausdorff[5]) entgegen der Behauptung des Satzes folgen:

$$\Delta^k \mu_0 \to \varepsilon \text{ mit } k \to \infty \text{ bzw. } \mu_n \to \varepsilon \text{ mit } n \to \infty. \tag{11}$$

Fände sich weiter in $\chi(u)$ ein Sprung vom Ausmaße $\varepsilon > 0$ an der Stelle ϑ_0 $(0 < \vartheta_0 < 1)$, so wäre (mit der obigen Bedeutung von $\theta(u)$) $\chi(u) - \theta(u)$ *immer noch monoton*, da dann

$$\begin{aligned} &\lim_{u \to \vartheta_0 - 0} [\chi(u) - \theta(u)] = \chi(\vartheta_0 - 0) \quad \text{und} \\ &\lim_{u \to \vartheta_0 + 0} [\chi(u) - \theta(u)] = \chi(\vartheta_0 + 0) - \varepsilon = \chi(\vartheta_0 - 0) \end{aligned} \tag{12}$$

würde. Dann wäre aber auch ϱ_n (vgl. (9)) nach Hausdorff[4]) immer noch vollmonoton, so daß entgegen (5) *für kein Indexpaar* k, n aus 0, 1, 2, ... (10) erfüllt wäre.

Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Zusatz. Aus der Schlußbemerkung bei Hausdorff[6]) erhält man auch noch leicht ein *enger gefaßtes charakteristisches Kriterium* für die Stetigkeit der Belegungsfunktion in (0, 1):

Für alle ϑ $(0 < \vartheta < 1)$ *gilt*

$$\Delta^k \mu_m = o[(1 - \vartheta)^k \vartheta^m], \tag{13}$$

wenn k *mit* m *so zu Unendlich strebt, daß*

$$\sqrt{k} \left(\frac{m}{m+k} - \vartheta \right) \to 0.$$

[6]) a. a. O. S. 109.

(Eingegangen am 27. Januar 1928.)

Entwickelbarkeit von Funktionen in Dirichletsche Reihen.

(Erste Mitteilung.)

Von

Th. Kaluza in Königsberg.

Die vorliegende Mitteilung führt folgende Gedanken aus:

Eine für $x > 0$ konvergente Dirichletsche Reihe mit positiven Koeffizienten

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \quad (a_n > 0,\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to \infty)$$

läßt sich als *Stieltjessches Momentintegral* über eine *monoton wachsende* Belegungsfunktion schreiben, die als Wachstumstellen lediglich *Sprungstellen* (ohne Häufungspunkt im Inneren des Integrationsintervalles) aufweist.

Für die Darstellbarkeit einer Funktion als Momentintegral überhaupt sind einfache charakteristische Bedingungen (vgl. Anm. 2) bekannt. Es handelt sich nur noch um die *Frage*:

Wie kann man es einer Momentfunktion selbst ansehen, daß ihre Belegungsfunktion eine „Sprungfunktion" der oben geschilderten Art ist?

Diese Frage wird im folgenden beantwortet:

Nach vorbereitenden Überlegungen in § 1 bringt § 2 einen Satz, der unter Heranziehung einer noch weitgehend willkürlichen Funktion $\delta(y)$ die *erste* Wachstumstelle λ_1 der Belegungsfunktion von $\nu(x)$ als obere Grenze einer Zahlenmenge darstellt. In § 3 wird dann durch geeignete Spezialisierungen von $\delta(y)$ der Zusammenhang dieser Zahlenmenge mit *funktionalen* (Wachstums-) Eigenschaften von $\nu(x)$ hergestellt, so daß λ_1 schließlich (auf mehrere Arten) einfach als *Limes* erhalten werden kann (§ 4), etwa

$$\lambda_1 = -\lim_{x \to \infty} \frac{\nu'(x)}{\nu(x)}.$$

Man kann nun aus $\nu(x)$ leicht eine neue Funktion $\nu_1(x)$ so bilden (§ 5), daß dabei höchstens die *erste* Wachstumstelle der Belegungsfunktion verloren geht, nämlich genau dann, wenn sie eine isolierte Wachstumstelle (*Sprungstelle*) darstellt (§§ 6 und 7). Bestimmt man alsdann die erste Wachstumstelle der Belegungsfunktion von $\nu_1(x)$, so hat man die *zweite* zu $\nu(x)$ gehörige gefunden usf.

Man gelangt so schließlich zu den in den §§ 8 und 9 geschilderten rekursiven *Limesverfahren*, die eine Momentfunktion als *Sprungfunktion* charakterisieren und zugleich ihre Sprungstellen liefern, mithin die oben gestellte Frage beantworten.

Darauf fußend formuliert endlich § 10 die *notwendigen und hinreichenden Bedingungen* dafür, daß sich eine unbeschränkt differenzierbare Funktion $\nu(x)$ in eine *Dirichletsche Reihe* vom obenstehenden Typus *mit positiven Koeffizienten* entwickeln läßt.

Die *zweite* Mitteilung wird neben einem einfachen Limesverfahren zur Bestimmung der Koeffizienten und einigen Ergänzungen und Anwendungen vor allem die wünschenswerte *Ausdehnung auf absolut konvergente Dirichletsche Reihen mit beliebigen Koeffizienten* bringen. Es handelt sich dabei vor allem darum, einfache charakteristische Bedingungen dafür anzugeben, daß sich eine Funktion als Momentintegral (in weiterem Sinne) über eine *schwankungsbeschränkte* Belegungsfunktion darstellen läßt.

§ 1.

Die für $v \geqq -\omega$ erklärte reelle Funktion $\psi(v)$ möge folgende *Eigenschaften* haben:

1. $\psi(v)$ ist *nirgends abnehmend*:

$$\psi(v_1) \leqq \psi(v_2), \quad \text{wenn} \quad v_1 < v_2; \tag{1}$$

2. $\psi(v)$ *verschwindet für* $v = -\omega$, *aber nicht identisch*:

$$\psi(-\omega) = 0; \quad \psi(v) > 0 \quad \textit{für genügend große } v; \tag{2}$$

3. $\psi(v)$ *ist linksstetig*:

$$\lim_{v \to v_0 - 0} \psi(v) = \psi(v_0) \qquad (-\omega < v_0); \tag{3}$$

4. *das mit* $\psi(v)$ *als Belegungsfunktion und einem reellen Parameter* x *gebildete uneigentliche Stieltjesintegral*

$$\nu(x) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-vx}\, d\psi(v) \quad \textit{konvergiert für } x > 0. \text{ [1]} \tag{4}$$

[1]) Die Forderungen 2. und 3. dienen nur der Bequemlichkeit.

Für jedes $\alpha > 0$ wird dann

$$(5) \qquad \nu(\alpha + x) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-vx} e^{-v\alpha}\, d\psi(v) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-vx}\, d\psi_\alpha(v),$$

wenn man

$$(6) \qquad \psi_\alpha(v) = \int_{-\omega}^{v} e^{-w\alpha}\, d\psi(w)$$

setzt; $\psi_\alpha(v)$ hat jetzt außer den obigen Eigenschaften 1. bis 4. noch die weitere, *beschränkt* zu sein:

$$(7) \qquad \lim_{v \to \infty} \psi_\alpha(v) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-v\alpha}\, d\psi(v) = \nu(\alpha).$$

Die *Substitution* $e^{-v} = u$ führt nun (5) über in:

$$(8) \qquad \nu(\alpha + x) = \int_{0}^{e^{\omega}} u^x\, d\chi_\alpha(u),$$

wenn man (in zweckmäßiger Normierung)

$$(9) \quad \chi_\alpha(0) = 0 \quad \text{und} \quad \chi_\alpha(u) = \nu(\alpha) - \psi_\alpha\left(\log \frac{1}{u}\right) \quad \text{für} \quad 0 < u \leqq e^{\omega}$$

setzt.

Ist insbesondere $\omega \leqq 0$, so wird

$$(10) \qquad \nu(\alpha + x) = \int_{0}^{\vartheta} u^x\, d\chi_\alpha(u), \qquad 0 < \vartheta = e^{\omega} \leqq 1,$$

eine in Hausdorffschem Sinne *vollmonotone Funktion*[2]); bei beliebigem reellen ω ist dies jedenfalls mit

$$(11) \qquad e^{-\omega x}\, \nu(\alpha + x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xs}\, d\varphi_\alpha(s), \qquad \varphi_\alpha(s) = \psi_\alpha(s - \omega)$$

der Fall. In allen Fällen aber ist $\nu(x + iy)$ (x und y reell) eine in der Halbebene $x > 0$ *reguläre Funktion*[2]) der komplexen Veränderlichen $x + iy$; insbesondere ist $\nu(x)$ für $x > 0$ *unbeschränkt differenzierbar* und man hat für $k = 0, 1, 2, \ldots$ ($\nu^{(0)}(x) = \nu(x)$ gesetzt)

$$(12) \qquad (-1)^k \nu^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{d^k \nu(x)}{dx^k} = \int_{-\omega}^{\infty} v^k e^{-vx}\, d\psi(v), \qquad x > 0.$$

§ 2.

Es möge jetzt λ_1 die „*erste Wachstumstelle*“ der Belegungsfunktion $\psi(v)$ von (4) bedeuten, d. h. es sei

$$(13) \qquad \psi(v) = 0 \quad \text{für} \quad -\omega \leqq v \leqq \lambda_1, \qquad \psi(v) > 0 \quad \text{für} \quad v > \lambda_1$$

---

[2]) Vgl. F. Hausdorff, *Summationsmethoden und Momentenfolgen* I und II, Math. Zeitschr. 9 (1921), insbesondere S. 102 u. 284.

(nach (2) muß eine solche Stelle sicher vorhanden sein). Wir beweisen dann folgenden

Satz 1. *Es sei $\delta(y)$ eine für alle reellen y erklärte, stetige, wesentlich monoton, aber schwächer als exponentiell wachsende und für $y=0$ verschwindende Funktion:*

$$\delta(y_1)<\delta(y_2), \text{ wenn } y_1<y_2; \quad \delta(y)=O(e^{\varepsilon y}) \text{ für jedes feste } \varepsilon>0; \quad \delta(0)=0; \tag{14}$$

der größte der Werte $\varkappa$, bei denen für alle $x>0$ gilt:

$$\nu_{(\varkappa)}(x)=\int_{-\omega}^{\infty}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v)\geqq 0, \tag{15}$$

liefert dann die erste Wachstumstelle λ_1 von $\psi(v)$.

Beweis. Wegen der Bedeutung von λ_1 ist zunächst für $\varkappa\leqq\lambda_1$

$$\nu_{(\varkappa)}(x)=\int_{-\omega}^{\infty}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v)=\int_{\lambda_1}^{\infty}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v)\geqq 0; \tag{16}$$

es bleibt zu zeigen, daß dies für $\varkappa>\lambda_1$ nicht mehr zutrifft. Mit den Abkürzungen

$$J_1=-\int_{-\omega}^{\varkappa}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v), \qquad J_2=\int_{\varkappa}^{\infty}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v), \tag{17}$$

wird

$$-\nu_{(\varkappa)}(x)=J_1-J_2 \tag{18}$$

und es gilt für $\lambda_1<\varkappa_1<\varkappa$ einmal

$$J_1\geqq-\int_{\lambda_1}^{\varkappa_1}\delta(v-\varkappa)e^{-vx}\,d\psi(v)\geqq-\delta(\varkappa_1-\varkappa)e^{-\varkappa_1 x}\psi(\varkappa_1), \tag{19}$$

d. h. wegen $\psi(\varkappa_1)>0$

$$J_1\geqq K_1 e^{-\varkappa_1 x}, \qquad K_1=-\delta(\varkappa_1-\varkappa)\psi(\varkappa_1)>0; \tag{20}$$

anderseits wird mit $v=\varkappa+t$

$$J_2=e^{-\varkappa x}\int_0^{\infty}\delta(t)e^{-tx}\,d\varphi(t), \qquad \varphi(t)=\psi(\varkappa+t)-\psi(\varkappa) \tag{21}$$

und man hat hier infolge der O-Bedingung aus (14) für $x\geqq\eta>\varepsilon$

$$J_2\leqq e^{-\varkappa x}K_2\int_0^{\infty}e^{-(x-\varepsilon)t}\,d\varphi(t) \tag{22}$$

$$\leqq e^{-\varkappa x}K_2\int_0^{\infty}e^{-(\eta-\varepsilon)t}\,d\varphi(t) \tag{23}$$

mit einer passenden Konstanten $K_2>0$, d. h.

$$J_2\leqq Ke^{-\varkappa x}, \qquad K=K_2\int_0^{\infty}e^{-(\eta-\varepsilon)t}\,d\varphi(t)>0. \tag{24}$$

Nach (18) ist also, da $\bar{\eta} > \varepsilon > 0$ beliebig, für $x > 0$

$$-\nu_{(\varkappa)}(x) \geqq K_1 e^{-\varkappa_1 x} - K e^{-\varkappa x}; \tag{25}$$

für genügend große x wird somit wegen $\varkappa_1 < \varkappa$ $\nu_{(\varkappa)}(x)$ negativ, entgegen (15).

§ 3.

Wir suchen nun die Funktion $\delta(y)$ des § 2 so zu *spezialisieren*, daß wir die erste Wachstumstelle λ_1 der Belegungsfunktion $\psi(v)$ in (4) durch *funktionale Eigenschaften* von $\nu(x)$ ausdrücken können:

Besonders naheliegend sind da folgende *Möglichkeiten*:

$$\delta_h(y) = 1 - e^{-hy}, \quad h > 0 \text{ fest}; \tag{26a}$$

insbesondere für $h = 1$:

$$\delta_1(y) = 1 - e^{-y}; \tag{26b}$$

schließlich noch als einfachste Funktion:

$$\delta_0(y) = y. \tag{26c}$$

Gemäß (15) wird dann, je nachdem,

$$\nu_{(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} (1 - e^{-h(v-\varkappa)}) e^{-vx}\, d\psi(v) = \nu(x) - e^{h\varkappa}\nu(x+h) \tag{27a}$$

bzw.

$$\nu_{(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} (1 - e^{-(v-\varkappa)}) e^{-vx}\, d\psi(v) = \nu(x) - e^{\varkappa}\nu(x+1) \tag{27b}$$

bzw.

$$\nu_{(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} (v - \varkappa) e^{-vx}\, d\psi(v) = -\nu'(x) - \varkappa\nu(x) \tag{27c}$$

und die erste Wachstumstelle λ_1 von $\psi(v)$ ist gleich dem größten der Werte $\varkappa$, bei denen die Ausdrücke rechts in (27a) bzw. (27b) bzw. (27c) für alle $x > 0$ nichtnegativ ausfallen, oder auch gleich dem größten $\varkappa$, bei dem noch durchweg gilt:

$$\text{a) } \frac{\nu(x)}{\nu(x+h)} \geqq e^{h\varkappa} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } \frac{\nu(x)}{\nu(x+1)} \geqq e^{\varkappa} \quad \text{bzw.} \quad \text{c) } -\frac{\nu'(x)}{\nu(x)} \geqq \varkappa. \tag{28}$$

Sonach läßt sich die Lage der ersten Wachstumstelle von $\psi(v)$ sogar *auf mehrere Arten* aus funktionalen Eigenschaften von $\nu(x)$ ablesen.

§ 4.

Wenn wir zeigen können, daß die in den Ungleichungen (28) links auftretenden Quotienten *monoton fallen*, dann liefern ihre Grenzwerte ohne weiteres das gewünschte maximale $\varkappa$. In der Tat gilt

Satz 2. *Die Funktion* $\nu(x)$ *sei durch* (4) *definiert; dann fällt sowohl* $\frac{\nu(x)}{\nu(x+h)}$ $(h>0$ *fest*$)$ *wie auch* $-\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}$ *monoton:*

$$(29) \qquad \text{a)}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu(x)}{\nu(x+h)}\right) \leqq 0; \qquad \text{c)}\ \frac{d}{dx}\left(-\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\right) \leqq 0 \quad \text{für} \quad x>0.$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die zweite Behauptung c): Bildet man mit zwei reellen Veränderlichen ξ und η die quadratische Form

$$(30) \qquad q_{(x)}(\xi,\eta) = \xi^2\nu''(x) + 2\xi\eta\nu'(x) + \eta^2\nu(x),$$

so wird nach (12) und wegen (1) für jedes $x>0$

$$(31) \qquad q_{(x)}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi v - \eta)^2 e^{-vx}\, d\psi(v) \geqq 0;$$

da somit $q_{(x)}(\xi,\eta)$ nie negativ wird, gilt für die Diskriminante

$$(32) \qquad \nu(x)\nu''(x) - (\nu(x))^2 = \nu^2(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\right) \geqq 0, \quad x>0$$

und damit ist b) bewiesen[3]).

Setzt man jetzt für $x>0$

$$(33) \qquad \Lambda(x) = -\log\nu(x),$$

was wegen $\nu(x)>0$ (vgl. (2)) reell möglich ist, so wird

$$(34) \qquad \frac{\nu(x)}{\nu(x+h)} = e^{\Lambda(x+h)-\Lambda(x)}$$

und dieser Quotient fällt monoton, wenn dies der Exponent rechts tut; es ist aber

$$(35) \qquad \Lambda'(x+h) - \Lambda'(x) = h\Lambda''(x+\vartheta h), \qquad 0<\vartheta<1,$$

und da nach (32) und (33) für $x>0$

$$(36) \qquad \Lambda''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}\right) \leqq 0,$$

ist auch a) bewiesen.

Wegen dieses monotonen Verhaltens der Quotienten (29) in Satz 2 stimmen aber ihre in (28) geforderten unteren Grenzen mit ihren *Limites* überein und man erhält unmittelbar den

Satz 3. *Die Funktion* $\nu(x)$ *sei durch* (4) *definiert; dann gilt für die erste Wachstumstelle* λ_1 *von* $\psi(v)$

$$(37) \qquad \text{a)}\ e^{h\lambda_1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\nu(x+h)}{\nu(x)}\ (h>0 \text{ fest}) \quad \text{bzw.} \quad \text{c)}\ \lambda_1 = -\lim\frac{\nu'(x)}{\nu(x)}.$$

[3]) Der Beweis ist im wesentlichen der der Schwarzschen Ungleichung.

Bemerkung. Den Spezialfall b) ($h=1$) schreibt man am besten in der Form

$$1-e^{\lambda_1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\Delta\nu(x)}{\nu(x)},\qquad \Delta\nu(x)=\nu(x)-\nu(x+1); \tag{38}$$

den Fall c) kann man auch aus a) durch den Grenzübergang $h\to 0$ herleiten.

§ 5.

Nach (15) ist für $x>0$

$$\nu_1(x)=\nu_{(\lambda_1)}(x)=\int_{-\omega}^{\infty}\delta(v-\lambda_1)\,e^{-vx}\,d\psi(v)\geqq 0; \tag{39}$$

man erkennt leicht, daß $\nu_1(x)$ sogar vom selben Typus ist wie $\nu(x)$; genauer hat man

Satz 4. *Die Funktion $\nu(x)$ sei durch (39) definiert; dann gilt für $x>0$*

$$\nu_1(x)=\int_{-\omega}^{\infty}e^{-vx}\,d\psi_1(v), \tag{40}$$

wobei

$$\psi_1(v)=\int_{-\omega}^{v}\delta(w-\lambda_1)\,d\psi(w) \tag{41}$$

ist und (bis auf die Möglichkeit identischen Verschwindens) ebenfalls die Eigenschaften 1. bis 4. aus § 1 besitzt.

Beweis. Die Gegenüberstellung von (39) und (40) zeigt, daß

$$\delta(v-\lambda_1)\,d\psi(v)=d\psi_1(v) \tag{42}$$

zu setzen ist; durch (zweckmäßig normierte) Integration folgt daraus (41). Für $v\leqq\lambda_1$ wird wegen $\psi(v)=0$ auch $\psi_1(v)=0$; von da ab wächst $\psi_1(v)$ monoton, da für $v\geqq\lambda_1$ nach (14) $\delta(v-\lambda_1)\geqq 0$ ausfällt; weiter ist $\psi_1(v)$ auch linksstetig, wie man aus

$$\psi_1(v_0)-\psi_1(v_0-h)=\int_{v_0-h}^{v_0}\delta(w-\lambda_1)\,d\psi(w)\leqq\delta(v_0-\lambda_1)(\psi(v_0)-\psi(v_0-h)) \tag{43}$$
$$(0<h\leqq v_0-\lambda_1)$$

und (3) leicht entnimmt; da endlich nach (14) für eine passende Konstante $K_3>0$ und jedes $\varepsilon>0$

$$\nu_1(x)=\int_{-\omega}^{\infty}\delta(v-\lambda_1)\,e^{-vx}\,d\psi(v)\leqq K_3\int_{\lambda_1}^{\infty}e^{-v(x-\varepsilon)}\,d\psi(v) \tag{44}$$

wird, folgt mit 4. aus § 1 auch die Konvergenz des Integrales in (39) oder (40) für $x>0$.

Es sei aber nochmals bemerkt, daß $\psi_1(v)$ und $\nu_1(x)$ im Gegensatz zu $\psi(v)$ und $\nu(x)$ *identisch verschwinden* können (wie später klar werden wird, genau dann, wenn $\psi(v)$ *nur eine* Wachstumstelle besitzt).

§ 6.

Wir fragen jetzt nach den *Wachstumstellen von* $\psi_1(v)$.

Aus

$$(45)\quad \psi_1(v_0+\varepsilon)-\psi_1(v_0-\eta)=\int_{v_0-\eta}^{v_0+\varepsilon}\delta(w-\lambda_1)\,d\psi(w),\quad \varepsilon\geqq 0,\ \eta\geqq 0,\ \varepsilon+\eta>0,$$

(vgl. (41)) entnimmt man zunächst (für genügend kleines ε und η), daß v_0 *höchstens dann Wachstumstelle von* $\psi_1(v)$ sein kann, *wenn es eine solche von* $\psi(v)$ *ist.*

Wenn nun $\psi_1(v)$ (und zugleich $\nu_1(x)$) nicht identisch verschwindet, besitzt $\psi_1(v)$ selbst eine erste Wachstumstelle λ_2, die nach dem soeben Bemerkten (vgl. (45)) sicher nicht kleiner als λ_1 sein kann; über die verbleibenden Möglichkeiten $\lambda_2=\lambda_1$ bzw. $\lambda_2>\lambda_1$ entscheidet

Satz 5. *Die Funktionen* $\nu(x)$ *und* $\psi(v)$ *bzw.* $\nu_1(x)$ *und* $\psi_1(v)$ *seien durch* (4) *bzw. durch* (39) *und* (41) *definiert,* λ_1 *bzw.* λ_2 *seien die ersten Wachstumstellen von* $\psi(v)$ *bzw.* $\psi_1(v)$; *je nachdem dann* λ_1 *Häufungswert von zu* $\psi(v)$ *gehörigen Wachstumstellen ist bzw. isoliert liegt, gilt* $\lambda_2=\lambda_1$ *bzw.* $\lambda_2>\lambda_1$.

Beweis. Zunächst sei λ_1 Häufungswert von Wachstumstellen; da dann für jedes $\eta>0$ zwischen λ_1 und $\lambda_1+\eta$ ausschließlich sicher noch eine Wachstumstelle $\bar{\lambda}$ von $\psi(v)$ liegt, für die

$$(46)\qquad \psi(\bar{\lambda})<\psi(\lambda_1+\eta)\qquad(\lambda_1<\bar{\lambda}<\lambda_1+\eta)$$

gilt, findet man nach (41)

$$(47)\qquad \psi_1(\lambda_1+\eta)=\int_{-\omega}^{\lambda_1+\eta}\delta(v-\lambda_1)\,d\psi(v)\geqq\int_{\bar{\lambda}}^{\lambda_1+\eta}\delta(v-\lambda_1)\,d\psi(v)$$
$$\geqq\delta(\bar{\lambda}-\lambda_1)\,(\psi(\lambda_1+\eta)-\psi(\bar{\lambda}))>0,$$

da wegen (14) und (46) die beiden letzten Faktoren wesentlich positiv sind; d. h. für jedes $\eta>0$ ist $\psi_1(\lambda_1+\eta)>\psi_1(\lambda_1)=0$ oder eben: λ_1 ist auch die erste Wachstumstelle von $\psi_1(v)$.

Jetzt sei zweitens λ_1 eine *isolierte* Wachstumstelle von $\psi(v)$; es muß dann ein $\eta>0$ geben, so daß

$$(48)\qquad \psi(v)=a>0\quad\text{für}\quad\lambda_1<v\leqq\lambda_1+\eta$$

konstant bleibt (λ_1 kann also nur eine *Sprungstelle* von $\psi(v)$ sein); man hat dann für jedes ε mit $0<\varepsilon<\eta$ (vgl. (47)):

$$(49)\quad \psi_1(\lambda_1+\eta)=\int_{-\omega}^{\lambda_1+\varepsilon}\delta(v-\lambda_1)\,d\psi(v)\leqq\delta(\varepsilon)\,\psi(\lambda_1+\varepsilon)=a\,\delta(\varepsilon).$$

Da nun ε beliebig klein sein darf, muß wegen $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=\delta(0)=0$ (vgl. Satz 1) $\psi_1(\lambda_1+\eta)=0$ sein, d. h. λ_1 ist keine Wachstumstelle von $\psi_1(v)$ oder: $\lambda_2>\lambda_1$, wie behauptet.

§ 7.

Wir untersuchen nun weiter, was bei dem Übergang von $\nu(x)$ zu $\nu_1(x)$ aus etwa vorhandenen „*späteren*“ (d. h. von den ersten verschiedenen) Wachstumstellen von $\psi(v)$ wird. Da gilt nun

Satz 6. *Die Belegungsfunktionen $\psi(v)$ bzw. $\psi_1(v)$ seien durch* (4) *bzw.* (41) *erklärt; jede spätere Wachstumstelle $\bar\lambda$ von $\psi(v)$ ist dann eine Wachstumstelle von $\psi_1(v)$; macht $\psi(v)$ in $\bar\lambda$ einen Sprung vom Ausmaße $\bar a$, ist also* (*vgl.* (3))

$$(50)\quad \lim_{v\to\bar\lambda+0}\psi(v)-\psi(\bar\lambda)=\bar a>0,$$

so macht $\psi_1(v)$ in λ einen Sprung vom Ausmaße

$$(51)\quad \bar a^{(1)}=\delta(\bar\lambda-\lambda_1)\,\bar a>0.$$

Beweis. Nach (41) und (14) ist mit $0<h<\lambda-\lambda_1$:

$$(52)\quad \psi_1(\bar\lambda+h)-\psi_1(\bar\lambda-h)=\int_{\bar\lambda-h}^{\bar\lambda+h}\delta(v-\lambda_1)\,d\psi(v)$$
$$\geqq\delta(\bar\lambda-\lambda_1-h)\,(\psi(\bar\lambda+h)-\psi(\bar\lambda-h))>0,$$

d. h. $\bar\lambda$ ist eine Wachstumstelle von $\psi_1(v)$. Im Falle einer Sprungstelle liefert (52) zusammen mit

$$(53)\quad \psi_1(\bar\lambda+h)-\psi_1(\bar\lambda-h)\leqq\delta(\bar\lambda-\lambda_1+h)\,(\psi(\bar\lambda+h)-\psi(\bar\lambda-h))$$

für $h\to 0$ die Behauptung (51).

Die Sätze 5 und 6, sowie die aus (45) gezogene Folgerung ergeben unmittelbar das

Korollar. *Dann und nur dann, wenn die erste Wachstumstelle λ_1 von $\psi(v)$ isoliert liegt* (*d. h. $\lambda_1<\lambda_2$*), *ist die Gesamtheit der späteren Wachstumstellen von $\psi(v)$ mit der Gesamtheit aller Wachstumstellen von $\psi_1(v)$ identisch; insbesondere fällt dann die erste Wachstumstelle λ_2 von $\psi_1(v)$ mit der zweiten Wachstumstelle von $\psi(v)$ zusammen* ($\psi_1(v)\not\equiv 0$ *vorausgesetzt*).

Ebenso erscheint jetzt die Schlußbemerkung von § 5 gerechtfertigt.

§ 8.

Nach Satz 4 kann man jetzt $\nu_1(x)$ ($\nu_1(x) \not\equiv 0$ vorausgesetzt) derselben Analyse wie zuvor $\nu(x)$ unterwerfen; geht man also zunächst zu einer sinngemäß gebildeten neuen Funktion $\nu_2(x)$ über und iteriert dann das ganze Verfahren (evtl. unendlich oft), so gelangt man zu dem für unseren Zweck fundamentalen

Satz 7. *Die Funktion $\nu_0(x) = \nu(x)$ sei durch (4), $\delta(y)$ durch Satz 1 definiert; bestimmt man zunächst den Maximalwert λ_1 aller der $\varkappa$, bei denen für alle $x > 0$*

$$\nu_{0(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \varkappa)\, e^{-xv}\, d\psi_0(v) \geqq 0 \qquad (\psi_0(v) \equiv \psi(v)) \tag{54}$$

ausfällt, bildet sodann die Funktion

$$\nu_1(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \lambda_1)\, e^{-xv}\, d\psi_0(v) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-xv}\, d\psi_1(v), \tag{55}$$

bestimmt wiederum den Maximalwert λ_2 aller der $\varkappa$, bei denen für alle $x > 0$

$$\nu_{1(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \varkappa)\, e^{-xv}\, d\psi_1(v) \geqq 0 \tag{56}$$

ausfällt, bildet weiter die Funktion

$$\nu_2(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \lambda_2)\, e^{-xv}\, d\psi_1(v) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-xv}\, d\psi_2(v) \tag{57}$$

und fährt so fort, indem man auf der n-ten Stufe ($n \geqq 1$) den Maximalwert λ_n aller der $\varkappa$ bestimmt, bei denen für alle $x > 0$

$$\nu_{n-1(\varkappa)}(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \varkappa)\, e^{-xv}\, d\psi_{n-1}(v) \geqq 0 \tag{58}$$

ausfällt und dann zu der Funktion

$$\nu_n(x) = \int_{-\omega}^{\infty} \delta(v - \lambda_n)\, e^{-xv}\, d\psi_{n-1} = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-xv}\, d\psi_n(v) \tag{59}$$

übergeht, dann kann dies rekurrente Verfahren nur so abbrechen, daß eine der neugebildeten Funktionen, etwa $\nu_r(x)$ ($r \geqq 1$), identisch verschwindet; dies ist charakteristisch dafür, daß die Belegungsfunktion $\psi(v) = \psi_0(v)$ von $\nu_0(x)$ als Wachstumstellen lediglich genau r Sprungstellen

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_r \tag{60}$$

besitzt; anderenfalls läßt sich das Verfahren unbeschränkt fortsetzen und es gilt: Notwendig und hinreichend dafür, daß $\psi_0(v)$ als Wachstumstellen lediglich isolierte Sprungstellen (in unendlicher Anzahl) besitzt,

ist, daß die durch das obige Verfahren entstehende Folge (λ_n) *wesentlich monoton und nicht beschränkt ausfällt:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to \infty; \tag{61}$$

die λ_n *sind dann zugleich die Sprungstellen von* $\psi(v)$.

Beweis. Satz 4 lehrt, daß sich das geschilderte Verfahren stets fortsetzen läßt, sobald die zuletzt gebildete Funktion $\nu_n(x)$ nicht identisch verschwindet. Ist dies aber, etwa für $n = r \geqq 1$ der Fall, so ist nach den Schlußbemerkungen der §§ 5 und 7 λ_r die einzige Wachstumstelle (Sprungstelle) von $\psi_{r-1}(v)$, nach Satz 5 und dem Korollar zu Satz 6 also, falls $r > 1$, die zweite und letzte von $\psi_{r-2}(v)$ und es ist $\lambda_r > \lambda_{r-1}$; durch Wiederholung dieser Schlußweise ergibt sich schließlich λ_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ als ϱ-te (isolierte) Wachstumstelle (Sprungstelle) von $\psi(v)$, λ_r zugleich als letzte. Hat umgekehrt $\psi(v)$ lediglich die Wachstumstellen (60), so hat wegen $\lambda_2 > \lambda_1$ nach dem Korollar $\psi_1(v)$ genau die Wachstumstellen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r$; so weiterschließend findet man für $\psi_{r-1}(v)$ nur noch die einzige Wachstumstelle λ_r, woraus $\nu_r(x) \equiv 0$, mithin der Abbruch des Verfahrens folgt, da dann ein der Forderung $\nu_{n(\varkappa)}(x) \geqq 0$ genügendes *endliches* maximales $\varkappa$ wegen $\psi_n(v) \equiv 0$ nicht existiert.

Bricht anderseits das Verfahren nicht ab, so zeigt man ebenso, daß λ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ die n-te (isolierte) Wachstumstelle (Sprungstelle) von $\psi(v)$ ist; wegen $\lambda_n \to \infty$ besitzt aber $\psi(v)$ keine anderen. Hat umgekehrt $\psi(v)$ die Wachstumstellen (61), so findet man, ganz wie zuvor, daß $\psi_{n-1}(v)$ genau die Wachstumstellen $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ besitzt; $\nu_n(x)$ kann also nicht identisch verschwinden.

Daß das maximale, (58) erfüllende $\varkappa$ zugleich die erste Wachstumstelle λ_n von $\psi_{n-1}(v)$ darstellt, ist nach Satz 1 klar.

§ 9.

Um den soeben bewiesenen Satz 7 praktisch auswerten zu können, muß man natürlich auf die *Spezialisierungen* von $\delta(y)$ aus § 3 zurückgreifen. Wir gewinnen so (auf mehrere Arten) eine *funktionale Charakterisierung* einer Belegungsfunktion $\psi_0(v)$ als *„Sprungfunktion"*, d. h. als Funktion, die *lediglich isolierte Wachstumstellen* (mithin Sprungstellen) besitzt. Wenn man außerdem bedenkt, daß (aus der Definition des *Stieltjesintegrals* heraus) das mit einer solchen Sprungfunktion als Belegungsfunktion angesetzte

$$\nu(x) = \int_{-\omega}^{\infty} e^{-xv}\, d\psi_0(v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n x} \qquad (x > 0) \tag{62}$$

wird, wenn $a_n \geqq 0$ das Ausmaß des Sprunges (vgl. (50)) angibt, den $\psi_0(v)$

in $v = \lambda_n$ macht, so erscheint das nächste Ziel unserer Entwicklungen erreicht. Wir dürfen jetzt formulieren:

Hauptsatz. *Die für $x > 0$ erklärte, daselbst unbeschränkt differenzierbare reelle Funktion $\nu(x) \equiv \nu_0(x)$ der reellen Veränderlichen x genüge den Bedingungen*

$$\nu(x) = O(e^{\omega x}), \quad (-1)^k \frac{d^k \mathsf{N}(x)}{dx^k} > 0 \tag{63}$$

$$(\mathsf{N}(x) = e^{-\omega x}\nu(x), \ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

($\mathsf{N}(x)$ *sei also vollmonoton im Sinne Hausdorffs*[2]); *dann existiert zunächst (mit demselben λ_1) jeder der drei Grenzwerte*

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty} \frac{\nu_0(x+h)}{\nu_0(x)} = e^{h\lambda_1} \quad \textit{bzw.} \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\nu_0(x)}{\nu_0(x)} = 1 - e^{\lambda_1} \tag{64}$$

$$\textit{bzw.} \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\nu_0'(x)}{\nu_0(x)} = -\lambda_1;$$

bildet man mit dem auf eine dieser Arten bestimmten λ_1 die neuen Funktionen

$$\text{a) } \nu_1(x) = \nu_0(x) - e^{h\lambda_1}\nu_0(x+h) \ \textit{bzw.} \ \text{b) } \nu_1(x) = \nu_0(x) - e^{\lambda_1}\nu_0(x+1) \tag{65}$$

$$\textit{bzw.} \ \text{c) } \nu_1(x) = -\nu_0'(x) - \lambda_1\nu_0(x),$$

so existieren weiter die Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{x\to\infty} \frac{\nu_1(x+h)}{\nu_1(x)} = e^{h\lambda_2} \quad \textit{bzw.} \quad \text{b) } \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta\nu_1(x)}{\nu_1(x)} = 1 - e^{\lambda_2} \tag{66}$$

$$\textit{bzw.} \quad \text{c) } \lim_{x\to\infty} \frac{\nu_1'(x)}{\nu_1(x)} = -\lambda_2;$$

bildet man wiederum die neuen Funktionen

$$\text{a) } \nu_2(x) = \nu_1(x) - e^{h\lambda_2}\nu_1(x+h) \ \textit{bzw.} \ \text{b) } \nu_2(x) = \nu_1(x) - e^{\lambda_2}\nu_1(x+1) \tag{67}$$

$$\textit{bzw.} \ \text{c) } \nu_2(x) = -\nu_1'(x) - \lambda_2\nu_1(x)$$

und fährt so weiter fort (vgl. Satz 7), so gelangt man auf jedem der drei Wege a), b) *und* c) *zu derselben Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, die dann und nur dann abbricht, wenn eine der neugebildeten Funktionen, etwa $\nu_r(x)$ $(r \geqq 1)$ identisch verschwindet; in diesem Falle ist $\nu(x)$ ein Exponentialpolynom mit lauter wesentlich positiven Koeffizienten und den Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$:*

$$\nu(x) = \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho e^{-\lambda_\varrho x} \quad (a_\varrho > 0 \ \textit{für} \ \varrho = 1, 2, \ldots, r). \tag{68}$$

Anderenfalls gelangt man zu einer unendlichen Folge (λ_n); fällt diese wesentlich monoton und nicht beschränkt aus:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \to \infty, \tag{69}$$

so läßt sich $\nu(x)$ *als für* $x > 0$ *konvergente Dirichletsche Reihe mit wesentlich positiven Koeffizienten und der Exponentenfolge* (λ_n) *darstellen*:

$$(70) \qquad \nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \qquad (a_n > 0 \text{ für } n = 1, 2, 3, \ldots;\ x > 0).$$

Diese Voraussetzungen sind auch notwendig für die Darstellbarkeit von $\nu(x)$ *in der Form* (68) *bzw.* (70).

Beweis. Gemäß den Resultaten von Hausdorff [2]) folgt aus (63), daß $\mathsf{N}(\alpha + x)$ sich für jedes $\alpha > 0$ in der Form (10), $\nu(\alpha + x)$ sich also in der Form (5), $\nu(x)$ selbst endlich in der Form (4) darstellen läßt; Satz 7 sichert dann (mit den drei Spezialisierungen (26a), (26b) und (26c) für $\delta(y)$) das *Ausreichen* der Bedingungen für die Darstellbarkeit (vgl. (62)). Ihre *Notwendigkeit* folgt einfach aus der Umkehrbarkeit von (62): Jede Reihe (68) oder (70) läßt sich ja als Stieltjesintegral der Form (4) schreiben, dessen Belegungsfunktion eben jene Sprungfunktion bildet, die an den Stellen λ_n je einen Sprung vom Ausmaße a_n nach oben macht.

(Eingegangen am 17. Juni 1927.)

Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Beweis des Nagumoschen Satzes.

Herr Nagumo hat kürzlich den folgenden Satz gefunden[1]):

Satz 1. *Wenn die Funktion $f(x,y)$ im Bereich*

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y| \leqq b \qquad (a>0, \quad b>0) \tag{1}$$

stetig ist und daselbst der Bedingung genügt:

$$x \left| \frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2} \right| \leqq 1 \quad \text{für} \quad y_1 \neq y_2, \tag{2}$$

so hat die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3}$$

nur ein Integral y, welches für $x=0$ verschwindet.

Bei der verblüffenden Einfachheit und Schönheit dieses Kriteriums muß man sich wundern, daß es nicht schon längst gefunden wurde. Nachdem es nun aber entdeckt ist, sei es mir gestattet, noch einen besonders einfachen Beweis dafür mitzuteilen.

Sind y und z zwei am Nullpunkt verschwindende Integrale, so ist mit Rücksicht auf (2)

[1]) Mitio Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, Japanese Journal of Mathematics **3** (1926), S. 107–112. Herr Nagumo mußte allerdings in der Bedingung (2) das Gleichheitszeichen ausschließen; wir werden aber sehen, daß es noch zulässig ist.

$$(4)\qquad \begin{cases} |y(x)-z(x)| = \left|\int_0^x [f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))]\, d\xi\right| \\ \qquad\qquad \leqq \int_0^x \frac{|y(\xi)-z(\xi)|}{\xi}\, d\xi, \end{cases}$$

und außerdem nach den Regeln der Differentialrechnung

$$(5)\qquad \lim_{x\to 0} \frac{y(x)-z(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y'(x)-z'(x)}{1} = f(0,0) - f(0,0) = 0.$$

Wenn nun nicht stets $y(x) = z(x)$ wäre, so gäbe es eine Stelle x_1 derart, daß $y(x_1) \neq z(x_1)$ ist. Dann hätte die Funktion

$$\frac{|y(x)-z(x)|}{x},$$

die wir mit Rücksicht auf (5) im Nullpunkt gleich 0 setzen, im Intervall $0 \leqq x \leqq x_1$ ein *positives* Maximum G, ohne konstant gleich G zu sein, und aus (4) würde folgen:

$$\frac{|y(x)-z(x)|}{x} < \frac{1}{x}\int_0^x G\, d\xi = G \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_1,$$

also auch $G < G$, was ein Widerspruch ist.

§ 2.

Beweis, daß das Kriterium in einer bestimmten Richtung keine Verschärfung zuläßt.

Wir zeigen jetzt, daß, wenn die Bedingung (2) durch die nur wenig geringere ersetzt wird:

$$(2a)\qquad x\left|\frac{f(x,y_1)-f(x,y_2)}{y_1-y_2}\right| \leqq 1+\varepsilon \quad \text{für} \quad y_1 \neq y_2,$$

wo ε eine positive Zahl ist, die Unität des Integrals nicht mehr gewährleistet werden kann. Zu dem Zweck wählen wir für $f(x,y)$ die Funktion

$$(6)\qquad f(x,y) = \begin{cases} (1+\varepsilon)\frac{y}{x} & \text{für} \quad 0 < y < x^{1+\varepsilon}, \\ (1+\varepsilon)x^{\varepsilon} & \text{für} \quad y \geqq x^{1+\varepsilon}, \\ 0 & \text{für} \quad y \leqq 0. \end{cases}$$

Sie ist augenscheinlich stetig für $x \geqq 0$ und beliebiges y; außerdem erfüllt sie die Bedingung (2a). Trotzdem gibt es unendlich viele im Nullpunkt verschwindende Integrale, nämlich

$$y = Cx^{1+\varepsilon} \quad \text{für} \quad 0 \leqq C \leqq 1.$$

§ 3.

Ausdehnung auf Systeme von Differentialgleichungen.

Der Nagumosche Satz läßt sich in folgender Weise auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen[2]):

Satz 2. *Das System von Differentialgleichungen*

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{A}$$

hat, wenn die Funktionen f_ν im Bereich

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |y_1| \leqq b, \ldots, |y_n| \leqq b \qquad (a > 0,\ b > 0) \tag{B}$$

stetig sind und daselbst den Bedingungen genügen:

$$x\,|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, \ldots, z_n)| \leqq \operatorname*{Max}_{\mu=1}^{n} |y_\mu - z_\mu|, \tag{C}$$

nur ein System von Integralen $y_1, \ldots, y_n$, die für $x = 0$ verschwinden.

Beweis. Sind y_ν, z_ν zwei solche Integralsysteme, so ist mit Rücksicht auf (C)

$$\left\{\begin{aligned} &|y_\nu(x) - z_\nu(x)| \\ &= \left|\int_0^x [f_\nu(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_n(\xi)) - f_\nu(\xi, z_1(\xi), \ldots, z_n(\xi))]\, d\xi\right| \\ &\leqq \int_0^x \operatorname*{Max}_{\mu=1}^{n} \frac{|y_\mu(\xi) - z_\mu(\xi)|}{\xi}\, d\xi \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und außerdem

$$\left\{\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{y_\nu(x) - z_\nu(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{y_\nu'(x) - z_\nu'(x)}{1} \\ &= f_\nu(0, 0, \ldots, 0) - f_\nu(0, 0, \ldots, 0) = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Wenn nun nicht stets

$$y_\mu(x) = z_\mu(x) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, n$$

wäre, so wäre die Funktion

$$\operatorname*{Max}_{\mu=1}^{n} \frac{|y_\mu(x) - z_\mu(x)|}{x},$$

[2]) Eine solche Ausdehnung hat auch Herr Max Müller in einer Arbeit, die in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie erscheint, vorgenommen. Vom Inhalt dieser Arbeit unterrichtet, habe ich den Satz 2 etwas zweckmäßiger formulieren können als es zuerst geschehen war.

die wir mit Rücksicht auf (8) am Nullpunkt gleich 0 setzen, an einer gewissen Stelle x_1 positiv. Ihr Maximum G im Intervall $0 \leqq x \leqq x_1$ wäre also positiv, ohne daß die Funktion konstant gleich G wäre. Aus (7) würde dann folgen:

$$\frac{|y_\nu(x)-z_\nu(x)|}{x} < \frac{1}{x}\int_0^x G\,d\xi = G \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_1,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Daher auch:

$$\operatorname*{Max}_{\nu=1}^{n} \frac{|y_\nu(x)-z_\nu(x)|}{x} < G \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_1,$$

und folglich auch $G < G$, was ein Widerspruch ist.

(Eingegangen am 29. Mai 1927.)

Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten[1]).

Von

Erich Kähler in Leipzig.

§ 1.

Es gibt eine Anzahl spezieller Lösungen des ebenen n-Körperproblems, bei denen die n Massenpunkte Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben. Die ganze Konfiguration dreht sich dabei wie ein starres Gebilde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Es scheint von vornherein sehr plausibel, daß diese Lösungen im allgemeinen zu Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten dadurch Anlaß geben, daß man die Massenpunkte durch gleich schwere Flüssigkeitskörper ersetzt. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß die Dimensionen der letzteren klein sind im Verhältnis zu denen der ganzen Konfiguration. In der vorliegenden Abhandlung werden die genauen Existenzbedingungen für solche Flüssigkeitsfiguren aufgestellt. Nach den grundlegenden Untersuchungen von Herrn Lichtenstein[2]) über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren führt diese Frage auf ein System von Integro-Differentialgleichungen, deren Auflösung wiederum von gewissen linearen Integralgleichungen abhängt. Bei den genannten Figuren haben diese stets Nullösungen. Die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten, die bei direkter Behandlung des Problems weitläufige Rechnungen nötig machen würden, hat Herr Lichtenstein bei dem

[1]) Als Inaugural-Dissertation von der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig zugelassen.

[2]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. I. Abh. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229—284. II. Abh. Math. Zeitschrift **7** (1920), S. 126—231.

Doppelsternproblem — der Spezialfall $n = 2$ — durch Einführung von Parametern umgehen können. Auch bei den allgemeineren hier zu behandelnden Figuren kann die Diskussion der sog. Verzweigungsgleichung, welche die eigentlichen Schwierigkeiten bietet, durch einen einfachen Kunstgriff vermieden werden. Die Durchführung der Rechnung führt auf ein gewisses System von $2n$ Gleichungen mit $2n - 1$ Unbekannten, dessen Lösbarkeit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der betrachteten Gleichgewichtsfiguren ist. In allen Fällen, wo die erzeugende Konfiguration eine durch den Schwerpunkt gehende Symmetrielinie besitzt, lassen sich die $2n$ Gleichungen auf n mit n Unbekannten reduzieren: Vollständig durchgeführt ist die Diskussion an zwei Beispielen, wo die n Körper entweder auf einer Geraden oder auf einem Kreise angeordnet sind. Wenn die Ausgangsfigur aber keine Symmetrielinie besitzt, wie z. B. der eine der Lagrangeschen Spezialfälle des Dreikörperproblems, kann die Zahl der Gleichungen nicht vermindert werden, und erst eine genauere Untersuchung der maßgebenden Gleichungen wird entscheiden, ob diese miteinander verträglich sind oder nicht[3]).

§ 2.

In einem Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt als Ursprung seien x_i, y_i, 0, $(i = 1, 2 \ldots n)$ die Koordinaten der n Massenpunkte. Damit die aus diesen Körpern bestehende Konfiguration im relativen Gleichgewicht ist, müssen die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \omega^2 x_i + \sum_k{}' m_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) &= 0, \\ \omega^2 y_i + \sum_k{}' m_k \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad \varrho_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$$

($\sum_k{}'$: Summation über alle $k \neq i$)

erfüllt sein, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und m_k die Massen der Körper bezeichnen.

Werden an Stelle der Punkte homogene Flüssigkeitskörper T_i mit den Massen m_i gesetzt, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen bekanntlich:

$$(2)\qquad \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + \sum_k{}' V_{ik}(X, Y, Z) = \text{konst auf } S_i.$$

Hierbei stellt $V_{ik}(X, Y, Z)$ den Wert des Potentials von T_k in dem auf der Oberfläche S_i von T_i liegenden Punkte (X, Y, Z) dar. Wenn die n Komponenten der Flüssigkeit, verglichen mit ihren Dimensionen, sehr

[3]) Herr E. Hölder hat inzwischen zeigen können, daß die fraglichen Gleichungen wohl miteinander verträglich sind.

weit voneinander entfernt sind, so werden sie sich nur wenig von den Kugeln unterscheiden, die mit den aus

$$m_i = \frac{4\pi}{3} a_i^3 f_i \quad (f_i\text{: Dichte von } T_i)$$

bestimmten Radien a_i um $(x_i, y_i, 0)$ beschrieben sind. Anstatt die Näherungskugeln um $(x_i, y_i, 0)$ zu legen, ist es aus später ersichtlichen Gründen zweckmäßiger, deren Zentren in die dicht daneben liegenden Punkte $P_i(x_i + \alpha_i, y_i + \beta_i, 0)$ zu legen. Die nähere Bestimmung der α_i, β_i wird später noch gegeben werden. Es wird sich zeigen, daß die neuen Mittelpunkte in erster Näherung mit den Schwerpunkten der T_i übereinstimmen.

In Polarkoordinaten r_i, φ_i, ϑ_i mit dem Pole P_i laute die Gleichung von S_i folgendermaßen:

$$r_i = a_i + \zeta_i(\varphi_i, \vartheta_i).$$

Um die Gleichungen (2) zur Bestimmung der Funktionen ζ_i auswerten zu können, sind zunächst die Potentiale V_{ik} durch ζ_i, ζ_k darzustellen.

§ 3.

Das von T_k herrührende Potential V_{ik} ist gleich dem Potential V'_{ik} der zu T_k gehörenden Kugel Σ_k, vermehrt um dasjenige der darüberliegenden sphäroidalen Schicht, welches durch

$$(3) \qquad V''_{ik} = f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta'_k \, d\sigma'}{r'} + (\zeta)_2, \qquad r'^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2$$

gegeben ist[4]). Das Integral ist über die Kugeloberfläche zu erstrecken. Bei $k \neq i$ ist

$$V'_{ik} = \frac{m_k}{r_{ik}} \qquad \text{mit} \qquad r_{ik}^2 = (X - x_k - \alpha_k)^2 + (Y - y_k - \beta_k)^2 + Z^2,$$

und für $k = i$ hat man

$$V'_{ik} = \frac{m_i}{a_i} - \frac{m_i}{a_i^2} \zeta_i + (\zeta)_2.$$

[4]) Hier wie im folgenden bezeichnet $(\zeta)_\mu$ einen von ζ abhängenden Ausdruck — gewöhnlich einen Integral- oder Integrodifferentialausdruck — der mit ζ unendlich klein und zwar von der μ-ten Ordnung wird. Was speziell den in der Formel (3) auftretenden Ausdruck $(\zeta)_2$ betrifft, so findet man dessen genauere Darstellung in den Abhandlungen des Herrn Lichtenstein, Math. Zeitschr. **1**, S. 229—284, **7**, S. 126—231 (1920), **10**, S. 130—159 (1921).

Hiernach gehen die Gleichungen (2) über in

$$4)\quad \frac{\omega^2}{2}(X^2+Y^2)-\frac{m_i}{a_i^2}\zeta_i+f_i\int_{\Sigma_i}\frac{\zeta_i'\,d\sigma'}{r'}+\sum_1^n{}'_k\left(\frac{m_k}{r_{ik}}+f_k\int_{\Sigma_k}\frac{\zeta_k'\,d\sigma'}{r'}\right)+(\zeta)_2=\text{konst.}$$

Es seien u_i, v_i, w_i die Koordinaten eines Punktes auf der Kugel von T_i bezogen auf den Mittelpunkt P_i. Dann sind die relativen Koordinaten des darüberliegenden (d. h. dieselben φ_i-, ϑ_i-Werte besitzenden) Punktes von S_i:

$$u_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),\qquad v_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),\qquad w_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),$$

während für denselben Punkt im alten Koordinatensystem

$$(5)\qquad \begin{cases} X=x_i+\alpha_i+u_i\left(1+\dfrac{\zeta_i}{a_i}\right), \\ Y=y_i+\beta_i+v_i\left(1+\dfrac{\zeta_i}{a_i}\right), \\ Z=\qquad\qquad w_i\left(1+\dfrac{\zeta_i}{a_i}\right) \end{cases}$$

ist. Setzt man daher

$$(6)\qquad (\alpha_i-\alpha_k)+u_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right)=A_{ik},\qquad (\beta_i-\beta_k)+v_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right)=B_{ik},$$

so wird

$$X-x_k-\alpha_k=(x_i-x_k)+A_{ik},\qquad Y-y_k-\beta_k=(y_i-y_k)+B_{ik}.$$

Die Entwicklung von $\frac{m_k}{r_{ik}}$ nach Potenzen von A_{ik}, B_{ik}, Z ergibt dann:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{m_k}{r_{ik}}=\frac{m_k}{\varrho_{ik}}&+A_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+B_{ik}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+\frac{1}{2}A_{ik}^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) \\ &+A_{ik}B_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+\frac{1}{2}B_{ik}^2\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)-\frac{1}{2}Z^2\frac{m_k}{\varrho_{ik}^3}+\text{usw.}, \end{aligned}$$

wobei die Differentiation nach x_i, y_i wie in (1) nur formal zu verstehen ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(8)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{p_{ik}}{\varrho^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{n_{ik}}{\varrho^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{q_{ik}}{\varrho^2},\quad \frac{1}{\varrho_{ik}^3}=\frac{o_{ik}}{\varrho^3},$$

indem mit ϱ eine proportional zu den Dimensionen der Konfiguration wachsende Größe bezeichnet wird. So kann im Falle der Lagrangeschen Dreieckslösung etwa die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks für ϱ genommen werden. Die Größe $\frac{1}{\varrho}$ spielt in den folgenden Rechnungen die Rolle eines kleinen Parameters. Führt man nun in (7) die Ausdrücke (6) ein und ordnet in passender Weise, so entsteht:

$$\frac{m_k}{r_{ik}} = \frac{m_k}{\varrho_{ik}} - \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) - \beta_k \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) + \frac{1}{\varrho^3}(\alpha, \beta)_2$$

$$+\left[\alpha_i + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right] \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) + \left[\beta_i + v_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right] \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)$$

$$+\frac{u_i}{\varrho^3}\{(\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik}\} \tag{9}$$

$$+\frac{v_i}{\varrho^3}\{(\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik}\}$$

$$+\frac{m_k}{\varrho^3}\left(\frac{1}{2} u_i^2 p_{ik} + u_i v_i n_{ik} + \frac{1}{2} v_i^2 q_{ik} - \frac{1}{2} w_i^2 o_{ik}\right) + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right);$$

$(\alpha, \beta)_2$ ist ein in den α, β quadratischer Ausdruck. Wegen (5) ergibt sich für das Potential der Zentrifugalkraft der Wert

$$\frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) = \frac{\omega^2}{2}(x_i^2 + y_i^2) + \frac{\omega^2}{2}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

$$+\left[\alpha_i + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right] \omega^2 x_i + \left[\beta_i + v_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right] \omega^2 y_i \tag{10}$$

$$+\omega^2 \alpha_i u_i + \omega^2 \beta_i v_i + \frac{\omega^2}{2}(u_i^2 + v_i^2) + \omega^2 (\zeta)_1 .$$

Da ω^2 stets von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho^3}$ ist, möge

$$\omega^2 = \frac{M}{\varrho^3}$$

gesetzt werden.

Endlich ist noch das Integral $\int \frac{\zeta_k' d\sigma'}{r'}$ $(k \neq i)$ nach Potenzen von $\frac{1}{\varrho}$ zu entwickeln. In $r' = \sqrt{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2}$ ist

$$x' = x_k + \alpha_k + u_k', \qquad y' = y_k + \beta_k + v_k', \qquad z' = w_k'$$

und daher

$$X - x' = x_i - x_k + \alpha_i - \alpha_k + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right) - u_k' = (x_i - x_k) + \bar{A}_{ik}$$

usw.

Es wird also

$$\frac{\zeta_k'}{r'} = \frac{\zeta_k'}{\varrho_{ik}} + \zeta_k' \bar{A}_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) + \zeta_k' \bar{B}_{ik} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) + \zeta_k' O\left(\frac{1}{\varrho^3}\right). \tag{11}$$

Wenn die Funktionen ζ den Bedingungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i d\sigma = \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i d\sigma = \int_{\Sigma_i} \zeta_i w_i d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

unterworfen werden und man voraussetzt, daß die Volumina von T_i und

Σ_i gleich sind, womit $\int \zeta_i \, d\sigma = (\zeta_i)_2$ wird, so folgt aus (11)

$$\int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k' \, d\sigma'}{r'} = \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2. \tag{12}$$

Alle diese Ausdrücke (9), (10) und (12) sind in (4) einzuführen, um nach geeigneter Umordnung die n Integro-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{3} a_i f_i \zeta_i - f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i' \, d\sigma'}{r'} = s_i + L_i^{(1)} + L_i^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \\
&L_i^{(1)} = \frac{u_i}{\varrho^3}\Big(M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik}\Big) \\
&\qquad + \frac{v_i}{\varrho^3}\Big(M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik}\Big), \\
&L_i^{(2)} = \frac{1}{2\varrho^3}\Big(\Big(u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\Big(M + \sum_k{}' m_k p_{ik}\Big) + 2 u_i v_i \Big(\sum_k{}' m_k n_{ik}\Big) \\
&\qquad + \Big(v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\Big(M + \sum_k{}' m_k q_{ik}\Big) - \Big(w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\sum_k{}' m_k o_{ik}\Big) \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{13}$$

zu erhalten, aus denen die ζ bestimmt werden können. Damit in den ersten Gliedern der rechten Seite nur Kugelfunktionen auftreten, haben wir u_i^2, v_i^2, w_i^2 durch $u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$, bzw. $v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$, $w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$ ersetzt. Die deshalb wieder zu subtrahierenden (konstanten) Teile sowie die übrigen konstanten Glieder sind alle in der Größe s_i vereinigt zu denken. Bei der Nachrechnung dieser Formel muß man beachten, daß die eckig eingeklammerten Teile von (9) und (10) sich wegen der ursprünglichen Gleichgewichtsbedingung (1) wegheben.

Da die Auflösung der obigen Gleichungen aufs engste mit der Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_i(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a_i \zeta - \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta' \, d\sigma'}{r'} = L_i \qquad (L_i \text{ gegeben})$$

zusammenhängt, so mögen erst einige Bemerkungen über diese hier eingeschaltet werden.

§ 4.

Für die Kugelfunktionen Y_m (m-ter Ordnung) gilt bekanntlich die Formel

$$\frac{4\pi}{3} a Y_m = \frac{2m+1}{3} \int_{\Sigma} \frac{Y_m' \, d\sigma'}{r'}. \tag{I}$$

Daraus folgt, daß für $m \neq 1$ eine Lösung von

$$G(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a\zeta - \int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\sigma'}{r'} = Y_m$$

durch

$$\zeta = c_m Y_m, \qquad c_m = \frac{3}{4\pi a} \frac{2m+1}{2m-2}$$

gegeben ist. Die bei $m = 1$ sich aus (I) ergebenden Beziehungen

$$G(u) = 0, \qquad G(v) = 0, \qquad G(w) = 0$$

(u, v, w: rechtwinklige Koordinaten eines Kugelpunktes)

zeigen, daß $G(\zeta)$ Nullösungen hat. Man gelangt zu einer Integralgleichung ohne Nullösungen, wenn man nach Erhard Schmidt[5]) den „zerspaltenen Kern“

$$N = \frac{1}{r'} - \frac{uu' + vv' + ww'}{a^3}$$

einführt und

$$\int_{\Sigma} \zeta' u' d\sigma' = A, \qquad \int_{\Sigma} \zeta' v' d\sigma' = B, \qquad \int_{\Sigma} \zeta' w' d\sigma' = C.$$

setzt. Dann geht die Integralgleichung $G(\zeta) = L$ in die Gleichung

$$H(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a\zeta - \int_{\Sigma} N\zeta' d\sigma' = L + \frac{A}{a^3} u + \frac{B}{a^3} v + \frac{C}{a^3} w,$$

deren linke Seite keine Nullösungen mehr aufweist, über.

Hängt L, also auch ζ, von gewissen Parametern ab, die so bestimmt werden können, daß A, B, C verschwinden, so ist einfach die Gleichung

$$H(\zeta) = L$$

zu lösen. Wie oben ergibt sich aus $H(\zeta) = Y_m$, wenn $m \neq 1$,

$$\zeta = c_m Y_m$$

jetzt aber als einzige Lösung dieser Gleichung. Wegen

$$H(u) = \frac{4\pi}{3} a u \qquad \text{usw.}$$

erhält man aus

$$H(\zeta) = \mu u + \nu v + \lambda w$$

$$\zeta = \frac{3}{4a\pi}(\mu u + \nu v + \lambda w). \tag{14}$$

[5]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Math. Annalen **65**, (1908), S. 370—399.

Für spätere Anwendungen sei noch angemerkt:

$$\begin{aligned} &\text{Aus } H(\zeta) = 1 && \text{folgt } \zeta = -\frac{3}{8a\pi}, \\ (14\,a) \qquad &\text{„ } H(\zeta) = uv && \text{„ } \zeta = \frac{15}{8a\pi} uv, \\ &\text{„ } H(\zeta) = u^2 - \frac{a^2}{3} && \text{„ } \zeta = \frac{15}{8a\pi}\left(u^2 - \frac{a^2}{3}\right). \end{aligned}$$

§ 5.

Die Gleichungen (13) sind von der Form

$$G_i(\zeta_i) = L_i(\alpha, \beta, \zeta), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei L außer von den α, β noch von den ζ abhängt, jedoch nur in höherer Ordnung. Um die Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung dieser Integro-Differentialgleichungen heranziehen zu können, wenden wir auf die linken Seiten die im vorigen Abschnitte dargestellte Umformung an, d. h. wir unterwerfen die Lösungen ζ den $3n$ Bedingungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i w_i d\sigma = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und ersetzen $G_i(\zeta_i)$ durch $H_i(\zeta_i)$. Die so entstehenden Gleichungen

$$H_i(\zeta_i) = L_i(\alpha, \beta, \zeta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

können dann durch sukzessive Approximationen folgendermaßen gelöst werden. Wir bestimmen $\zeta_i^{(1)}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(1)}) = L_i(\alpha, \beta, 0),$$

sodann $\zeta_i^{(2)}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(2)}) = L_i(\alpha, \beta, \zeta^{(1)}),$$

$\zeta_i^{(3)}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(3)}) = L_i(\alpha, \beta, \zeta^{(2)}),$$

usw.

Hierdurch ergibt sich die Lösung $\zeta_i = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_i^{(\nu)}$ als Potenzreihe in den Parametern α, β, s und $\frac{1}{\varrho}$. Bezüglich des Beweises, der genau so zu führen ist wie beim Doppelsternproblem, sei auf die Abhandlungen von Herrn Lichtenstein verwiesen[6]). Mit Hilfe der Formeln (14), (14a) berechnet sich leicht für die erste Näherung

$$f_i \zeta_i^{(1)} = -\frac{3}{8 a_i \pi} s_i + \frac{3}{4 a_i \pi} L_i^{(1)} + \frac{15}{8 a_i \pi} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right).$$

[6]) loc. cit.

Bei der zweiten Näherung kommen zu den ersten Gliedern noch einige mit $\frac{s}{\varrho^3}$ oder s^2 behaftete hinzu, alle weiteren sind mit $\frac{1}{\varrho^4}$ multipliziert. Von der dritten an werden überhaupt nur noch die mit $\frac{1}{\varrho^4}$ multiplizierten Glieder modifiziert. An die auf solche Weise erhaltene Lösung haben wir nun einige Forderungen zu stellen. Zunächst folgt aus der Annahme, daß die Volumina von Σ_i und T_i gleich sind

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i \, d\sigma = (\zeta)_2 ;$$

denn die Volumendifferenz von T_i und Σ_i ist bis auf Größen zweiter Ordnung in ζ_i gleich $\int_{\Sigma_i} \zeta_i \, d\sigma$. Wegen $\int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} \, d\sigma = 0$ und $\int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} \, d\sigma = 0$ erhält man zur Bestimmung der s_i Gleichungen von der Form

$$A_i s_i + B_i s_i^2 = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),$$

wonach

$$(15) \qquad s_i = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right) \quad \text{und} \quad f_i \zeta_i = \frac{3}{4 a_i \pi} L_i^{(1)} + \frac{15}{8 a_i \pi} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

gesetzt werden kann. Außerdem war angenommen:

$$\int_{\Sigma_i} u_i \zeta_i \, d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} v_i \zeta_i \, d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} w_i \zeta_i \, d\sigma = 0 .$$

Die dritte dieser Bedingungen ist von selbst erfüllt, da ζ_i in allen Fällen symmetrisch in bezug auf die Ebene $Z = 0$ ist; denn weil die aus Kugeln bestehende Ausgangsfigur diese Symmetrieeigenschaft zeigt, gilt dies von den einzelnen Näherungen und damit auch von der endgültigen Figur. Die übrigen $2n$ Gleichungen

$$(16) \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i \, d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i \, d\sigma = 0$$

sollen dadurch befriedigt werden, daß man den $2n$ Parametern α, β geeignete Werte erteilt. Aus diesem Grunde sind überhaupt erst die Verschiebungen der Kugelmittelpunkte eingeführt worden.

Wegen (15) und

$$\int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} u_i \, d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} v_i \, d\sigma = 0$$

ergeben die obigen Bedingungsgleichungen

$$\int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} u_i \, d\sigma = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \qquad \int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} v_i \, d\sigma = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

oder nach (13)

$$
\begin{aligned}
&M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),\\
&M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

wobei mit dem Faktor $\frac{1}{\varrho^3}$ gekürzt worden ist. Die Existenz der postulierten Gleichgewichtsfiguren hängt ganz von der Lösbarkeit dieser Gleichungen ab. Kann man nämlich die α, β so bestimmen, daß die Bedingungen (16) erfüllt sind, so ist nach dem Obigen die Existenz der entsprechenden Figur gesichert. Aber es folgt auch umgekehrt aus dem Bestehen der Gleichgewichtsfigur, daß es stets solche Punkte $P_i(x_i + \alpha_i,\ y_i + \beta_i,\ 0)$ gibt, in bezug auf welche die Gleichungen (16) gelten. Die Auflösung dieser Bedingungsgleichungen wird durch einen besonderen Umstand im allgemeinen sehr erschwert. Wenn es nämlich überhaupt Lösungen $(\alpha,\ \beta)$ gibt, so sind diese nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen noch von einem Parameter ab; denn entsprechen einer bestimmten Lösung $(\alpha,\ \beta)$ die Punkte $R_i(x_i + \alpha_i,\ y_i + \beta_i,\ 0)$, so können an deren Stelle auch die aus ihnen durch eine beliebige Drehung des Koordinatensystems hervorgehenden genommen werden. Man kann daher stets eines der α, β fixieren, also etwa $\alpha_1 = 0$ setzen; dann aber sind die übrigen $2n - 1$ Größen α_i, β_i aus den $2n$ Gleichungen (16) bzw. (17) zu berechnen. Bevor wir auf die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten näher eingehen, mag erst noch eine andere Methode der Bestimmung der $(\alpha,\ \beta)$ hier angegeben werden, aus welcher die mechanische Bedeutung der Gleichungen (16) sichtbar wird und zugleich — ihre Lösbarkeit vorausgesetzt — über die Größenordnung von α_i, β_i Aufschluß gewonnen wird.

§ 6.

Ein bekannter Satz der Mechanik besagt: Ist ein freies System unter der Einwirkung innerer und äußerer Kräfte im Gleichgewicht, so heben sich die in den Schwerpunkt des Systems überpflanzten äußeren Kräfte gegenseitig auf.

Wir wenden den Satz auf T_i an, indem wir die Zentrifugalkraft und die Anziehungskräfte der $n - 1$ übrigen Körper als äußere Kräfte betrachten.

Ist $Q_i(x_i + \bar{\alpha}_i,\ y_i + \bar{\beta}_i,\ 0)$ der Schwerpunkt von T_i, so ist offenbar

$$m_i \bar{\alpha}_i = m_i \alpha_i + f_i \int_{\bar{S}_i} u_i \zeta_i \, d\sigma + (\zeta_i)_2$$

oder wegen (15) und (16)

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + O\left(\frac{1}{\varrho^6}\right) \tag{18}$$

und entsprechend

$$\bar{\beta}_i = \beta_i + O\left(\frac{1}{\varrho^6}\right).$$

Die Resultante der Zentrifugalkraft hat die Komponenten

$$m_i\omega^2(x_i+\bar{\alpha}_i) = \frac{M m_i}{\varrho^3}(x_i+\alpha_i) + O\left(\frac{1}{\varrho^9}\right), \quad m_i\omega^2(y_i+\bar{\beta}_i) = \frac{M m_i}{\varrho^3}(y_i+\beta_i) + O\left(\frac{1}{\varrho^9}\right).$$

Die Komponenten der Resultante der Anziehungskräfte sind

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k{}' \frac{m_i m_k}{\bar{r}_{ik}} + m_k f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} + m_i f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}}\right) + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_k{}' \frac{m_i m_k}{\bar{r}_{ik}} + m_k f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} + m_i f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}}\right) + \frac{1}{\varrho_2}(\zeta)_2$$

mit

$$\bar{r}_{ik}^2 = (x_i - x_k + \alpha_i - \alpha_k)^2 + (y_i - y_k + \beta_i - \beta_k)^2;$$

$\bar{r}$ ist die Entfernung des Elements $d\sigma$ vom Punkte Q_i. Ganz ähnlich wie in Art. 3, S. 222 ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}} = \frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_1 = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right), \text{ usw.}$$

Der zitierte Satz der Mechanik führt somit auf die Beziehungen

$$\frac{M}{\varrho^3}(x_i+\alpha_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right), \qquad \frac{M}{\varrho^3}(y_i+\beta_i) + \frac{\partial}{\partial y_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right) \tag{19}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von $\alpha_i - \alpha_k$ und $\beta_i - \beta_k$ findet man

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k{}' \frac{m_k}{r_{ik}}\right) + \sum_k{}' \left[(\alpha_i - \alpha_k)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{m_k}{r_{ik}}\right) + (\beta_i - \beta_k)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_i}\left(\frac{m_k}{r_{ik}}\right)\right]$$
$$+ \frac{1}{\varrho^4}(\alpha, \beta)_2,$$

wo $(\alpha, \beta)_2$ allgemein eine mit Gliedern 2. Ordnung beginnende Potenzreihe der α, β bezeichnen soll.

Danach wird aus (19) schließlich unter Beachtung von (1) und (8)

$$\begin{aligned} M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik} + \frac{1}{\varrho}(\alpha, \beta)_2 &= O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \\ M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik} + \frac{1}{\varrho}(\alpha, \beta)_2 &= O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Hauptglieder dieser Gleichungen sind, wie zu erwarten war, genau dieselben wie die von (17). Diese Gleichungen sind ebenso wie (17) stets überbestimmt und also nur dann lösbar, wenn eine gewisse Anzahl dieser bzw. jener Gleichungen von selbst erfüllt sind, sofern die übrigen befriedigt sind. Kann man nun zeigen, daß bei den von (17) übrig bleibenden Gleichungen die aus den Koeffizienten der α, β gebildete Determinante von Null verschieden ist, so folgt aus (20) unmittelbar, daß α_i, β_i höchstens von der Größenanordnung $\frac{1}{\varrho^4}$ sind.

Der Ausdruck für ζ_i kann somit geschrieben werden:

$$\zeta_i = \frac{15}{8\,\alpha_i\,\pi\,f_i} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

oder

$$(21)\quad \zeta_i = \left(u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{P_i}{\varrho^3} + 2\,u_i\,v_i\frac{N_i}{\varrho^3} + \left(v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{Q_i}{\varrho^3} - \left(w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{O_i}{\varrho^3} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

mit

$$(22)\quad \begin{aligned} P_i &= \frac{15}{16\,a_i\,f_i\,\pi}\left(M + \sum_k{}' m_k\,p_{ik}\right), & N_i &= \frac{15}{16\,a_i\,f_i\,\pi}\sum_k{}' m_k\,n_{ik}, \\ Q_i &= \frac{15}{16\,a_i\,f_i\,\pi}\left(M + \sum_k{}' m_k\,q_{ik}\right), & O_i &= \frac{15}{16\,a_i\,f_i\,\pi}\sum_k{}' m_k\,o_{ik}. \end{aligned}$$

§ 7.

Die Mannigfaltigkeit der Lösungen des n-Körperproblems, die zur Bildung von Gleichgewichtsfiguren führen, ist zu groß, um über die Lösbarkeit der Gleichungen (17) ohne genauere Kenntnis der Ausgangsfigur allgemein urteilen zu können. Sind aber von der ursprünglichen Konfiguration die Symmetrieeigenschaften und eventuell einige weitere Daten bekannt, so reichen die entwickelten Methoden hin, um die Existenz der entsprechenden Flüssigkeitsfigur zu beweisen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Im n-Körperproblem gibt es eine Lösung, wo die n Massenpunkte — die übrigens beliebige Massen haben können — in bestimmten unveränderlichen Abständen auf einer Geraden verteilt liegen, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt dreht. Nehmen wir diese Gerade als x-Achse des Koordinatensystems, wodurch $y_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ wird, so kann

$$\beta_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt werden. In der Tat ist die unter dieser Voraussetzung sich ergebende Lösung ζ_i der Gleichungen (13) zur Ebene $y = 0$ symmetrisch, weil dies für jede der Näherungen gilt. Dann aber ist wegen der Beziehungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i \, d\sigma = 0 ,$$

die aus der Symmetrieeigenschaft folgen, die zweite Gruppe der Gleichungen (17) von selbst erfüllt, und es bleiben zur Bestimmung der α_i gerade n Gleichungen

$$\Big(M + \sum_k{}' m_k p_{ik}\Big)\alpha_i - \sum_k{}' m_k p_{ik}\alpha_k = \frac{1}{\varrho}(\ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

übrig, deren Determinante

$$D = \begin{vmatrix} M + \sum_k{}' m_k p_{1k} & -m_2 p_{12} & -m_3 p_{13} & \ldots & -m_n p_{1n} \\ -m_1 p_{21} & M + \sum_k{}' m_k p_{2k} & -m_3 p_{23} & \ldots & \ldots \\ -m_1 p_{31} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -m_1 p_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & M + \sum_k{}' m_k p_{nk} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Zufolge

$$p_{ik} = \varrho^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\frac{1}{\varrho_{ik}}\Big) = \varrho^3\Big(\frac{3(x_i - x_k)^2}{\varrho_{ik}^5} - \frac{1}{\varrho_{ik}^3}\Big) = 2\Big(\frac{\varrho}{\varrho_{ik}}\Big)^3 > 0$$

sind nämlich in obiger Determinante die Diagonalelemente positiv, die übrigen Glieder alle negativ, und die Summen der Zeilenelemente gleich M, d. h. > 0. Diese Merkmale reichen nach einem am Schluß dieser Arbeit bewiesenen Lemma aus, um zu erkennen, daß D positiv, und zwar größer als M^n ist.

Eine andere Konfiguration, bei welcher der Existenzbeweis der zugehörigen Gleichgewichtsfigur ebenfalls ohne weitere Rechnung durchgeführt werden kann, ist die folgende: n gleiche Massen bilden die Ecken eines regulären Polygons, in dessen Mittelpunkt man sich noch einen anderen Körper gelegt denken kann. Die Flüssigkeitskörper, welche die n auf einem Kreise liegenden Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzen, mögen alle dieselbe Dichte f haben; dagegen kann die Dichte des Zentralkörpers, dem wir den Index 0 geben wollen, von f verschieden sein. Die Verbindungslinien der Punkte m_i mit dem gemeinsamen Schwerpunkte sind Symmetrielinien der Ausgangsfigur. Setzen wir nun

$$(23) \qquad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \qquad \alpha_i = x_i\tau, \quad \beta_i = y_i\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so zeigt die mit diesen α, β berechnete Lösung der Integrodifferentialgleichungen für die ζ die gleiche Symmetrieeigenschaft. Danach ist

$$\int_{\Sigma_0} \zeta_0 u_0 \, d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_0} \zeta_0 v_0 \, d\sigma = 0,$$

und die übrigen Gleichungen reduzieren sich, da die auf dem Kreise liegenden Komponenten der Flüssigkeit untereinander kongruent sind und je eine Symmetrieebene haben, auf eine, für die man etwa

$$x_1 \int_{\Sigma_1} \zeta_1 u_1 \, d\sigma + y_1 \int_{\Sigma_1} \zeta_1 v_1 \, d\sigma = 0$$

nehmen kann. Durch die Substitution (23) mag die letztere Bedingung in

$$A\tau = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

übergehen. Dabei bezeichnet A eine endliche von ϱ unabhängige Konstante. Man findet leicht durch Vergleich mit den linken Seiten von (17) und unter Beachtung der Bedeutung (8) von p_{ik}, n_{ik}, q_{ik}, daß $A\tau$ für unendlich kleine τ proportional der Änderung der radialen Komponente der Gesamtkraft in m_1 ist, wenn auf die ganze Konfiguration die Verschiebungen (23) ausgeübt werden. Da hierdurch die Anziehungskräfte im entgegengesetzten Sinne geändert werden wie die Zentrifugalkraft, so ist A von Null verschieden und daher $\tau = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ oder besser $\tau = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$ (vgl. S. 231), womit die Existenz der fraglichen Gleichgewichtsfigur bewiesen ist.

An diesen beiden Beispielen sieht man, wie mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften die Zahl der Bedingungsgleichungen vermindert werden kann und dadurch die Berechnung der α, β erst ermöglicht wird. Ähnliche Betrachtungen können in allen den Fällen mit Erfolg angewandt werden, wo die Ausgangsfigur mindestens eine Symmetrielinie besitzt, nur müssen dann im allgemeinen mehr Einzelheiten über die Konfiguration bekannt sein als in den obigen Beispielen, bei denen ja bloße Vorzeichenangaben zum Existenzbeweis genügten. Indem man den durch Symmetrie zusammengehörigen Massenpunkten symmetrische Verschiebungen α_i, β_i zuordnet, reduzieren sich die Gleichungen (16) auf n in n Unbekannten, womit deren Bestimmung nichts mehr im Wege steht. Hat die Ausgangsfigur jedoch keine Symmetrielinie, so scheinen die Gleichungen (16) unlösbar zu sein, da in diesem Falle keine Möglichkeit offensteht, die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen zu verringern. Im Gegenteil bieten dann die entwickelten Methoden die Mittel zum Nichtexistenzbeweis der fraglichen Figuren, indem nur zu zeigen ist, daß die Gleichungen (16) miteinander unverträglich sind.

Unter den in Frage kommenden Lösungen des n-Körperproblems ist nur eine bekannt, die eine Asymmetrie aufweist: die Lagrangesche Lösung des Dreikörperproblems, bei der die drei Massenpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden. Da hierbei die Massen beliebige Werte haben können, so liegt bei ungleichen Massenverhältnissen der Fall der Asymmetrie vor. Auf ganz ähnliche Weise wie oben zeigt man hier, daß die Bedingungen (16)

bestimmt miteinander verträglich sind, wenn mindestens zwei der Massen m_1, m_2, m_3 gleich sind. Dann aber hat die entstehende Figur wieder eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse. Die Entscheidung über den allgemeinen Fall bleibt, wie gesagt, einer weiteren Untersuchung vorbehalten.

§ 8.

Die im vorangehenden entwickelte Methode des Existenzbeweises von Systemen kugelähnlicher Gleichgewichtsfiguren ist auch dann noch anwendbar, wenn zu den gegenseitigen Anziehungen noch ein schwaches Außenfeld hinzutritt. Zur Erläuterung sei hier der Fall behandelt, wo eine (evtl. in einem geeigneten Koordinatensystem) ruhende Flüssigkeitsmasse T unter der Wirkung eines Feldes steht, das sich aus einem Potential $G(X, Y, Z)$ ableitet. Hierbei braucht G keiner besonderen Symmetriebedingung zu genügen.

Das Bestehen des Gleichgewichts fordert:

$$V(X, Y, Z) + G(X, Y, Z) = \text{konst.} \tag{24}$$

auf der Oberfläche S von T, wenn V das Potential der Eigengravitation von T darstellt. Man wähle den Punkt $Q(x, y, z)$ so, daß in ihm die drei Komponenten der Außenkräfte verschwinden; es gilt also

$$G_x(x, y, z) = 0, \quad G_y(x, y, z) = 0, \quad G_z(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

Es soll nun angenommen werden, daß sich G in der Umgebung von Q in eine Potenzreihe

$$G(x+A, y+B, z+C) = \sum_{i,k,l} \frac{p_{ikl}}{\varrho} \left(\frac{A}{\varrho}\right)^i \left(\frac{B}{\varrho}\right)^k \left(\frac{C}{\varrho}\right)^l \tag{26}$$

entwickeln läßt, die für

$$\left|\frac{A}{\varrho}\right|, \left|\frac{B}{\varrho}\right|, \left|\frac{C}{\varrho}\right| \leqq D$$

gleichmäßig konvergent sein möge. Die Zahl ϱ ist ein Parameter, dem beliebig große Werte beigelegt werden können. Die Größen p_{ikl} und D sind als von ϱ unabhängig anzusehen. Ein solches Feld liegt z. B. vor, wenn G von der Anziehung ferner Massen herrührt.

Für genügend große ϱ wird T annähernd Kugelgestalt annehmen. Um den dicht bei Q liegenden Punkt $P(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$ sei die „Näherungskugel“ Σ mit dem Radius a beschrieben, wo a durch

$$m = \frac{4\pi}{3} a^3 f \qquad \begin{pmatrix} m\text{: Masse} \\ f\text{: Dichte} \end{pmatrix} \text{ von } T$$

definiert ist. Relativ zu dieser Kugel laute die Gleichung von S in Polarkoordinaten (r, φ, ϑ)

$$r = a + \zeta(\varphi, \vartheta).$$

Bezeichnen dann u, v, w wieder die auf P bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Kugelpunktes, so ergibt sich für den zugehörigen Punkt auf S:

$$X = x + \alpha + u\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad Y = y + \beta + v\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad Z = z + \gamma + w\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right).$$

Nach Einführung von

$$A = \alpha + u\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad B = \beta + v\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad C = \gamma + w\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right)$$

in (26) erhält man für die ersten Glieder in der Entwicklung von $G(X, Y, Z)$ (man beachte, daß wegen (25) $p_{100} = p_{010} = p_{001} = 0$ ist)

$$(27) \qquad G(X, Y, Z) = \text{konst.} + L^{(1)} + L^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),$$

wobei

$$L^{(1)} = \frac{2u}{\varrho^3}(p_{200}\alpha + p_{110}\beta + p_{101}\gamma) + \frac{2v}{\varrho^3}(p_{110}\alpha + p_{020}\beta + p_{011}\gamma) + \frac{2w}{\varrho^3}(p_{101}\alpha + p_{011}\beta + p_{002}\gamma),$$

$$L^{(2)} = \frac{p_{200}}{\varrho^3}\left(u^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{p_{020}}{\varrho^3}\left(v^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{p_{002}}{\varrho^3}\left(w^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{2p_{110}}{\varrho^3}uv + \frac{2p_{101}}{\varrho^3}uw + \frac{2p_{011}}{\varrho^3}vw$$

ist.

Das Potential der Eigengravitation hat wie früher den Ausdruck

$$V(X, Y, Z) = \text{konst.} - \frac{4\pi a f}{3}\zeta + f\int_{\Sigma}\frac{\zeta' d\sigma'}{r'} + (\zeta)_2.$$

Die Bedingung (24) führt somit auf die Gleichung

$$(28) \qquad \frac{4\pi a f}{3}\zeta - f\int_{\Sigma}\frac{\zeta' d\sigma'}{r'} = s + L^{(1)} + L^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),$$

deren Lösung wie in Art. 5 die Einführung des „zerspaltenen Kernes"

$$N = \frac{1}{r'} - \left(\frac{uu' + vv' + ww'}{a^3}\right)$$

notwendig macht. Nachdem aber α, β, γ so bestimmt sind, daß

$$(29) \qquad \int_{\Sigma}\zeta u\, d\sigma = 0, \quad \int_{\Sigma}\zeta v\, d\sigma = 0, \quad \int_{\Sigma}\zeta w\, d\sigma = 0$$

wird, kann in der obigen Integrodifferentialgleichung einfach N an Stelle von $\frac{1}{r'}$ gesetzt werden, und man findet

$$(30) \qquad \zeta f = \frac{3}{4a\pi}L^{(1)} + \frac{15}{8a\pi}L^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),$$

wenn man s so bestimmt, daß das Volumen von T gleich dem von Σ wird.

Es fragt sich wieder, ob man durch geeignete Wahl von α, β, γ den Bedingungen (29) genügen kann. Wegen (30) schreiben sich diese in der Form

$$(31)\quad \begin{gathered} p_{200}\alpha + p_{110}\beta + p_{101}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad p_{110}\alpha + p_{020}\beta + p_{011}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \\ p_{101}\alpha + p_{011}\beta + p_{002}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \end{gathered}$$

Ist also die Determinante aus den Koeffizienten der linken Seite von Null verschieden, so ergibt sich

$$\alpha = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad \beta = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \qquad \gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

und die Existenz der Figur ist dann bewiesen.

Wenn das Potential G von der Anziehung ferner Massen herrührt (wobei man für ϱ etwa die kleinste Entfernung jener Massen von P wählen kann), so läßt sich wie in § 6 Genaueres über die Größenordnung der α, β, γ aussagen.

Nach dem in § 6 zitierten Satz der Mechanik ist

$$\int_T G_{x'}(x', y', z')\,d\tau = 0, \quad \int_T G_{y'}(x', y', z')\,d\tau = 0, \quad \int_T G_{z'}(x', y', z')\,d\tau = 0$$
$$(d\tau = dx'\,dy'\,dz').$$

Integriert man hier zuerst über das Innere der Kugel Σ, so ergibt sich zufolge einer bekannten Eigenschaft der Newtonschen Anziehung auf Kugeln

$$G_x(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$$

bzw.

$$G_y(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma), \quad G_z(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma).$$

Die Integration über die sphäroidale Schicht gibt weiter

$$\int_\Sigma \zeta\, G_x(X, Y, Z)\,d\sigma + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2, \quad \text{usw.},$$

was, wie leicht ersichtlich ist, in der Form $\frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_1 + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2$ geschrieben werden kann. Man bekommt also

$$G_x(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = \frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_2 + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2 = O\left(\frac{1}{\varrho^3}\right), \quad \text{usw.}$$

Werden hier die linken Seiten nach (26) entwickelt, so entstehen den Gleichungen (31) ganz ähnliche Beziehungen, aus denen zu ersehen ist, daß die rechten Seiten von (31) dnrch $O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$ ersetzt werden können. Die Größen α, β, γ sind mithin von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho^4}$.

§ 9.

Beweis des in § 7 benutzten Determinantensatzes.

Schreibt man eine Determinante in der Form

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + \sum_k{}' a_{1k} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x_2 + \sum_k{}' a_{2k} & -a_{23} & \dots & \dots \\ -a_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \dots & x_n + \sum_k{}' a_{nk} \end{vmatrix},$$

wo dann x_i die Zeilensummen darstellen, so enthält ihre Entwicklung nach den Größen x_i und a_{ik} nur positive Koeffizienten. Für $n = 2$ hat man offenbar

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_{12} & -a_{12} \\ -a_{21} & x_2 + a_{21} \end{vmatrix} = x_1 x_2 + x_1 a_{21} + x_2 a_{12}.$$

Wir beweisen, daß der Satz für n gilt, wenn dies für $n-1$ der Fall ist. Die Entwicklung von D nach Potenzen der x_i enthält kein von diesen freies Glied, da eine Determinante mit verschwindenden Zeilensummen gleich Null ist. Die Gesamtheit der mit einem bestimmten x, z. B. mit x_λ multiplizierten Glieder ist $x_\lambda A_\lambda$, wo A_λ die durch Streichung der λ-ten Zeile und λ-ten Kolonne aus D entstehende Determinante $(n-1)$-ter Ordnung bezeichnet. In A_λ sind die Diagonalelemente gleich $(x_i + a_{i\lambda}) + \sum_k{}'' a_{ik}$ ($\sum_k{}''$: Summation über alle $k \neq \lambda, i$), und die übrigen Glieder sind unter den $-a_{ik}$ $(k \neq \lambda, i)$ enthalten. Da die Entwicklung von A_λ nach Potenzen der $(x_i + a_{i\lambda})$, a_{ik} als Determinante $(n-1)$-ter Ordnung nur positive Koeffizienten enthält, so folgt daraus ohne weiteres die Richtigkeit der obigen Behauptung. Bei positiven a_{ik} und x_i gilt überdies

$$D > x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n,$$

weil in der Entwicklung von D stets das Glied $x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ auftritt.

(Eingegangen am 29. Juli 1927.)

Beweis einer approximativen Funktionalgleichung.

Von

J. G. van der Corput in Groningen.

Zweck dieser Mitteilung ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen eine Summe

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} \tag{1}$$

approximativ, und zwar möglichst scharf, durch eine andere Summe zu ersetzen. Wie ich das genau meine, wird sich aus dem folgenden Satz ergeben, in dem das Landausche Zeichen O sich bezieht auf eine reelle, unbeschränkt wachsende Variable x. Alle in dieser Arbeit auftretenden Zahlen, Veränderlichen und Funktionen dürfen von x abhängen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil vorausgesetzt oder behauptet wird; fest soll hier bezeichnen: unabhängig von x.

Voraussetzungen. 1. *Es sei* $a < b$; *im Intervall* $a \leqq y \leqq b$ *sei* $f(y)$ *reell, unendlich oft differentiierbar*[1]), $f''(y) > 0$, *und für jedes feste* $k \geqq 3$

$$\frac{f^{(k)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k}} = O\left(\frac{1}{x^k}\right) \tag{2}$$

gleichmäßig[2]) *in* y (*gleichmäßig in* k *ist nicht nötig*).

---

[1]) In den Endpunkten eventuell nur nach innen.

[2]) $$u(x) = O(v(x))$$

bezeichnet, daß bei geeignet gewählten von x unabhängigen x_0 und $c\,(c > 0)$ für jedes $x \geqq x_0$

$$|u(x)| < c\,v(x)$$

ist. Hängen $u(x)$ und $v(x)$ von einem Parameter y ab, und können dabei x_0 und c unabhängig von y gewählt werden, dann sagt man, daß die Beziehung

$$u(x) = O(v(x))$$

gleichmäßig in y gilt.

2. *Es sei im Intervall* $a \leqq y \leqq b$ *die Funktion* $r(y)$ *reell, differentiierbar*[3]*), und*

$$\frac{r'(y)}{\sqrt{f''(y)}} = O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{3}$$

gleichmäßig in y.

3. *Im Intervall* $a \leqq y \leqq b$ *sei* $g(y)$ *unendlich oft differentiierbar*[3]*); für jedes feste ganze* $k \geqq 0$ *sei*

$$e^{-r(y)} \frac{g^{(k)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^k}\right)^{4)} \tag{4}$$

gleichmäßig in y *(gleichmäßig in* k *ist wieder nicht nötig), und für jedes feste* R *und jedes feste ganze* $k \geqq 0$ *sei*

$$e^{-r(a)} \frac{g^{(k)}(a)}{(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right) \tag{5}$$

und

$$e^{-r(b)} \frac{g^{(k)}(b)}{(f''(b))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right); \tag{6}$$

diese Beziehungen brauchen nicht gleichmäßig in k *und* R *zu gelten.*

Behauptungen. 1. *Wird*

$$\eta = f'(y), \quad (a \leqq y \leqq b), \quad \alpha = f'(a), \quad \beta = f'(b) \tag{7}$$

gesetzt, dann ist $\alpha < \beta$, *und dann sind die Zahlen* $y\,(a \leqq y \leqq b)$ *und* $\eta\,(\alpha \leqq \eta \leqq \beta)$ *einander eineindeutig zugeordnet, so daß wir setzen können*

$$-f(y) + y\eta + \frac{1}{8} = \varphi(\eta). \tag{8}$$

Alsdann ist $\varphi(\eta)$ *im Intervall* $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$ *reell, unendlich oft nach* η *differentiierbar*[3]*), und es ist*

$$\varphi''(\eta) = \frac{1}{f''(y)} > 0. \tag{9}$$

2. *Wird*

$$r(y) = \varrho(\eta) \tag{10}$$

$(a \leqq y \leqq b,\ \alpha \leqq \eta \leqq \beta)$ *und für jedes ganze* $\mu \geqq 0$

$$\chi_\mu(\eta) = i^\mu \pi^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\mu)!} (\varphi''(\eta))^{\mu+\frac{1}{2}} \left\{\frac{d^{2\mu}}{dz^{2\mu}} g(y+z)\, e^{2\pi i(f(y+z)-f(y)-zf'(y)-\frac{1}{2}z^2 f''(y))}\right\}_{z=0} \tag{11}$$

---

[3]) Siehe Fußnote [1]).

[4]) Mit $g^{(0)}(y)$ wird natürlich $g(y)$ gemeint.

($\alpha \leqq \eta \leqq \beta$) gesetzt, so gibt es im Intervall $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$ eine Funktion $\chi(\eta)$ derart, daß für jedes feste ganze $\varkappa \geqq 0$ und jedes feste ν

$$\chi^{(\varkappa)}(\eta) = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) + O\, e^{\varrho(\eta)}\, x^{-2\nu-\varkappa}\, (\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}\ ^{5}) \tag{12}$$

gleichmäßig in η ist, also insbesondere ($\varkappa = 0$ gesetzt)

$$\chi(\eta) = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu(\eta) + O\, e^{\varrho(\eta)}\, x^{-2\nu} \sqrt[4]{\varphi''(\eta)}\,. \tag{13}$$

3. (*Approximative Funktionalgleichung.*) *Wird $\chi(\eta)$ so gewählt, daß* (13) *gilt, so ist für jedes feste R*

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \\ &+ O\left\{ \frac{e^{r(a)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} \right) + \frac{1}{x^R} \int_a^b e^{r(y)} \left((f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}} \right) dy \right\}. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Wird $\chi(\eta)$ so gewählt, daß (12) gilt, dann bleibt jede in den Voraussetzungen oder in den Behauptungen vorkommende Formel gültig, wenn a und α, b und β, f und φ, g und χ, k und $\varkappa$, m und μ, n und ν, r und ϱ, y und η, z und ζ vertauscht werden, wenn dann nur außerdem i durch $-i$ ersetzt wird. Ich werde sagen, daß durch diese Vertauschung und Ersetzung die Voraussetzungen 1, 2 und 3 in die Behauptungen 4, 5 und 6, und die Behauptungen 1, 2 und 3 in die Behauptungen 7, 8 und 9 übergehen. Durch diese Vertauschung und Ersetzung verwandelt sich also die zweite Behauptung in Behauptung 8, die folgendermaßen lautet:

8. *Gilt* (12) *und wird für jedes ganze $m \geqq 0$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$*

$$g_m(y) = (-i)^m \pi^{-m-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{(2m)!} (f''(y))^{m+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d^{2m}}{d\zeta^{2m}} \chi(\eta+\zeta)\, e^{-2\pi i \left(\varphi(\eta+\zeta) - \varphi(\eta) - \zeta\varphi'(\eta) - \frac{1}{2}\zeta^2\varphi''(\eta)\right)} \right\}_{\zeta=0} \tag{15}$$

gesetzt, so ist für jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste n im Intervall $a \leqq y \leqq b$

$$g^{(k)}(y) = \sum_{\substack{0 \leqq m < n \\ m \text{ ganz}}} g_m^{(k)}(y) + O\, e^{r(y)}\, x^{-2n-k} (f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \tag{16}$$

gleichmäßig in y.

---

[5]) Eine leere Summe bedeute stets Null.

Beim Beweis von Behauptung 8 braucht man die Beziehungen (5) und (6) nicht.

Kommt in den in unserem Satze auftretenden Zahlen oder Funktionen ein Parameter vor, und gelten die Voraussetzungen des Satzes gleichmäßig in diesem Parameter, dann gelten auch die Behauptungen gleichmäßig in diesem Parameter. Gelten z. B. die Voraussetzungen bei geeignet gewähltem b_0 gleichmäßig für jedes $b \geqq b_0$, und konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty e^{r(y)}\left((f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\right) dy,$$

so darf b durch ∞ ersetzt werden. Gelten die Voraussetzungen bei geeignet gewähltem a_0 gleichmäßig für jedes $a \leqq a_0$, und konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^b e^{r(y)}\left((f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\right) dy,$$

so darf a durch $-\infty$ ersetzt werden.

Es ist unmittelbar klar, daß bei gegebenen Funktionen f und g die Funktion $\chi(\eta)$ nicht durch (13), sogar nicht durch (12) eindeutig bestimmt ist, aber wie schon gesagt, gilt die Funktionalgleichung für jede Funktion $\chi(\eta)$, die (13) erfüllt, m. a. W.:

Entwickelt man

$$g(y+z)\, e^{2\pi i\left(f(y+z) - f(y) - z f'(y) - \frac{1}{2} z^2 f''(y)\right)} \tag{17}$$

$(a \leqq y \leqq b)$ formell nach Taylor nach steigenden Potenzen von z, und bekommt man dann die formelle Reihe

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h(y)\, z^h, \tag{18}$$

so gilt die approximative Funktionalgleichung für jede Funktion $\chi(\eta)$, die die Eigenschaft besitzt, daß für jedes feste ν

$$\chi(\eta) = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} i^\mu \pi^{-\mu - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) (f''(y))^{-\mu - \frac{1}{2}} t_{2\mu}(y) + O\left(\frac{e^{r(y)}}{x^{2\nu} \sqrt[4]{f''(y)}}\right) \tag{19}$$

ist; denn wegen (11), (10) und (9) sind die Relationen (13) und (19) identisch.

Ich zerlege den Beweis in vier Teile:

I. Beweis der Behauptungen 1, 4, 5 und 7.

II. Beweis der Behauptungen 2 und 6.

III. Beweis der Behauptungen 3 und 9.

IV. Beweis von Behauptung 8.

I. Beweis der Behauptungen 1, 4, 5 und 7.

Wegen $f''(y) > 0$ und (7) ist $\alpha < \beta$, und sind die Zahlen y $(a \leqq y \leqq b)$ und $\eta = f'(y)$ $(\alpha \leqq \eta \leqq \beta)$ einander eineindeutig zugeordnet. Nach (7) ist

$$\frac{d\eta}{dy} = f''(y), \qquad \frac{dy}{d\eta} = \frac{1}{f''(y)}; \tag{20}$$

wegen (8) und (7) ist

$$\varphi'(\eta) = (-f'(y) + \eta)\frac{dy}{d\eta} + y = y, \qquad \varphi''(\eta) = \frac{1}{f''(y)} > 0. \tag{21}$$

Aus (20) ergibt sich, daß y unendlich oft nach η differentiierbar ist, so daß wegen (21) auch $\varphi(\eta)$ unendlich oft nach η differentiiert werden kann. Hiermit ist Behauptung 1 bewiesen.

Hilfssatz 1[6]). *Für jedes ganze* $\varkappa \geqq 3$ *ist*

$$\varphi^{(\varkappa)}(\eta) = \sum_{(p)} K_1(p)\,(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3}\ldots(f^{(\varkappa)}(y))^{p_\varkappa}, \tag{22}$$

wo $K_1(p)$ *eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom System* $(p) = (p_2, p_3, \ldots, p_\varkappa)$ *abhängt und wo die Summe erstreckt wird über die Systeme* (p) *von ganzen Zahlen* $p_2, p_3, \ldots, p_\varkappa$ *mit*

$$2p_2 + 3p_3 + \ldots + \varkappa p_\varkappa = -\varkappa; \tag{23}$$

$$p_3 \geqq 0,\ p_4 \geqq 0, \ldots, p_\varkappa \geqq 0; \tag{24}$$

$$-2\varkappa \leqq p_2 \leqq -\varkappa. \tag{25}$$

Beweis. Nach (21) und (20) ist

$$\varphi'''(\eta) = -(f''(y))^{-3} f'''(y),$$

so daß (22) im Spezialfall $\varkappa = 3$ gilt $(p_2 = -3,\ p_3 = 1,\ K_1(p) = -1)$.

Es werde jetzt $\varkappa \geqq 4$ vorausgesetzt, und es sei Hilfssatz 1 mit $\varkappa - 1$ statt $\varkappa$ schon bewiesen, d. h. es sei

$$\varphi^{(\varkappa-1)}(\eta) = \sum_{(q)} K_1(q)\,(f''(y))^{q_2}(f'''(y))^{q_3}\ldots(f^{(\varkappa-1)}(y))^{q_{\varkappa-1}} \tag{26}$$

mit

$$\begin{cases} 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (\varkappa-1)q_{\varkappa-1} = -\varkappa + 1; \\ q_3 \geqq 0,\ q_4 \geqq 0, \ldots, q_{\varkappa-1} \geqq 0; \\ -2\varkappa + 2 \leqq q_2 \leqq -\varkappa + 1. \end{cases} \tag{27}$$

Um $\varphi^{(\varkappa)}(\eta)$ zu bekommen, muß man wegen (20) die linke Seite von (26) nach y differentiieren und das Resultat mit $\frac{1}{f''(y)}$ multiplizieren.

[6]) In den Hilfssätzen 1, 2, 3 und 4 werden die Beziehungen (5) und (6) nicht benutzt. Diese Bemerkung ist unentbehrlich, da diese Hilfssätze auch in Teil IV dieses Beweises eine Rolle spielen und ebendort (5) und (6) nicht angewendet werden dürfen.

Man erhält dann (22), und zwar mit

$$(28)\quad \begin{cases} 2p_2+3p_3+\ldots+\varkappa p_\varkappa = 2q_2+3q_3+\ldots+(\varkappa-1)q_{\varkappa-1}-1; \\ p_3 \geqq 0,\ p_4 \geqq 0,\ \ldots,\ p_\varkappa \geqq 0; \\ q_2-2 \leqq p_2 \leqq q_2-1. \end{cases}$$

Aus (27) und (28) folgen (23), (24) und (25).

Mittels dieses Hilfssatzes ist es sehr leicht Behauptung 4 zu beweisen. Diese Behauptung besagt, daß Voraussetzung 1 gültig bleibt, wenn a und α, b und β, f und φ, y und η vertauscht werden. Nach der ersten Behauptung ist $\alpha < \beta$; $\varphi(\eta)$ ist reell, unendlich oft differentiierbar [7]) nach η; es ist $\varphi''(\eta) > 0$; und nach (9) und (22) ist für jedes feste ganze $\varkappa \geqq 3$ gleichmäßig in η

$$\frac{\varphi^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa}} = (f''(y))^{\frac{1}{2}\varkappa}\sum_{(p)} K_1(p)(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3}\ldots(f^{(\varkappa)}(y))^{p_\varkappa}$$

$$= O(f''(y))^{\frac{1}{2}\varkappa}\sum_{(p)}(f''(y))^{\frac{1}{2}(2p_2+3p_3+\ldots+\varkappa p_\varkappa)}\, x^{-(3p_3+4p_4+\ldots+\varkappa p_\varkappa)}$$

(wegen (2))

$$= O\sum_{(p)} x^{2p_2+\varkappa}$$

wegen (23), so daß aus (25) folgt

$$(29)\qquad \frac{\varphi^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa}} = O\left(\frac{1}{x^\varkappa}\right)$$

gleichmäßig in η. Hiermit ist Behauptung 4 bewiesen.

Behauptung 5 ist klar; denn aus (9), (10), (20) und (3) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi''(\eta)}}\varrho'(\eta) = \sqrt{f''(y)}\cdot\frac{r'(y)}{f''(y)} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Jetzt noch Behauptung 7. Wegen (21) ist $y = \varphi'(\eta)$ $(\alpha \leqq \eta \leqq \beta)$, also $a = \varphi'(\alpha)$, $b = \varphi'(\beta)$; es ist $a < b$; die Beziehungen (8) und (9) ändern sich nicht, wenn f und φ, y und η vertauscht werden; $f(y)$ ist reell und unendlich oft nach y differentiierbar [7]).

Hiermit sind die Behauptungen 1, 4, 5 und 7 bewiesen.

II. Beweis der Behauptungen 2 und 6.

Hilfssatz 2 [8]). *Wird für jedes Zahlenpaar y und $y+z$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$*

$$(30)\qquad P(z) = e^{2\pi i(f(y+z)-f(y)-zf'(y)-\frac{1}{2}z^2f''(y))}$$

[7]) Siehe Fußnote [1]).

[8]) Siehe Fußnote [6]).

gesetzt ($P(z)$ *hängt natürlich auch von* y *ab*), *so ist für jedes ganze* $k \geqq 0$

$$P^{(k)}(0) = \sum_{(p)} K_2(p)(f'''(y))^{p_3}(f^{\mathrm{IV}}(y))^{p_4}\ldots(f^{(k)}(y))^{p_k}, \tag{31}$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) *von ganzen nichtnegativen Zahlen* $p_3, p_4, \ldots, p_k$ *mit*

$$3p_3 + 4p_4 + \ldots + kp_k = k, \tag{32}$$

und wo $K_2(p)$ *eine geeignet gewählte nur vom System* (p) *abhängige Zahl bezeichnet.*

Beweis. Es ist

$$P(0) = 1;$$

$$P'(z) = 2\pi i\, P(z)\{f'(y+z) - f'(y) - zf''(y)\},$$

also für jedes $k \geqq 1$

$$P^{(k)}(z) = 2\pi i \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} P^{(k-1-h)}(z)\cdot\frac{d^h}{dz^h}(f'(y+z) - f'(y) - zf''(y)).$$

Somit

$$P^{(k)}(0) = 2\pi i \sum_{h=2}^{k-1} \binom{k-1}{h} P^{(k-1-h)}(0)\cdot f^{(h+1)}(y), \tag{33}$$

wo die Summe, falls $k = 1$ oder 2 ist, leer, also Null ist. Es ist also

$$P(0) = 1; \quad P'(0) = 0; \quad P''(0) = 0; \quad P'''(0) = 2\pi i f'''(y),$$

so daß die Behauptung des Hilfssatzes für $k = 0$, 1, 2 und 3 schon bewiesen ist.

Es sei $k \geqq 4$, und es sei (31) mit (32) für jede Zahl $< k$ statt k schon bewiesen. Alsdann ist für jedes ganze $h \geqq 2$ und $\leqq k-1$

$$P^{(k-1-h)}(0) = \sum_{(q)} K_2(q)(f'''(y))^{q_3}(f^{\mathrm{IV}}(y))^{q_4}\ldots(f^{(k-1-h)}(y))^{q_{k-1-h}}$$

mit

$$3q_3 + 4q_4 + \ldots + (k-1-h)q_{k-1-h} = k-1-h, \tag{34}$$

also

$$P^{(k-1-h)}(0)\cdot f^{(h+1)}(y) = \sum_{(q)} K_3(p,h)(f'''(y))^{p_3}(f^{\mathrm{IV}}(y))^{p_4}\ldots(f^{(k)}(y))^{p_k} \tag{35}$$

mit

$$\begin{aligned} &3p_3 + 4p_4 + \ldots + kp_k \\ &= 3q_3 + 4q_4 + \ldots + (k-1-h)q_{k-1-h} + (h+1) \end{aligned} \tag{36}$$

und wo $K_3(p,h)$ eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom System (p) und von der Zahl h abhängt.

Aus (36) und (34) folgt (32); wegen (33) und (35) gilt (31) mit

$$K_2(p) = 2\pi i \sum_{h=2}^{k-1} \binom{k-1}{h} K_3(p, h);$$

zwar hängt die rechte Seite von k ab, aber wegen (32) ist k bei gegebenem System (p) eindeutig bestimmt, so daß auch $K_2(p)$ durch dieses System eindeutig bestimmt ist.

Hilfssatz 3[9]). *Wird im Intervall* $a \leqq y \leqq b$

$$Q_k(y) = \left\{ \frac{d^k g(y+z) P(z)}{dz^k} \right\}_{z=0} \qquad (k \text{ ganz} \geqq 0) \tag{37}$$

gesetzt, wo $P(z)$ *durch* (30) *definiert ist, so ist*

$$Q_k(y) = \sum_{(p)} K_4(p) g^{(p_1)}(y) (f'''(y))^{p_3} (f^{\mathrm{IV}}(y))^{p_4} \dots (f^{(k)}(y))^{(p_k)}, \tag{38}$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) *von nicht-negativen ganzen Zahlen* $p_1, p_3, p_4, \dots, p_k$ *mit*

$$p_1 + 3p_3 + 4p_4 + \dots + kp_k = k. \tag{39}$$

Beweis. Es ist

$$Q_k(y) = \sum_{p_1=0}^{k} \binom{k}{p_1} g^{(p_1)}(y) P^{(k-p_1)}(0);$$

wenden wir, um $P^{(k-p_1)}(0)$ zu ersetzen, den vorigen Hilfssatz mit $k - p_1$ statt k an, dann erhalten wir (38), und dann ist wegen (32) mit $k - p_1$ statt k

$$3p_3 + 4p_4 + \dots + kp_k = k - p_1,$$

so daß auch (39) gilt.

Hilfssatz 4*. *Für jedes ganze* $\mu \geqq 0$ *und jedes ganze* $\varkappa \geqq 0$ *ist*

$$\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) = \sum_{(p)} K_5(p, \mu) g^{(p_1)}(y) (f''(y))^{p_2 - \frac{1}{2}} (f'''(y))^{p_3} f^{\mathrm{IV}}(y)^{p_4} \dots, \tag{40}$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) *von ganzen Zahlen* $p_1, p_2, p_3, \dots$ *mit*

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + \dots = -\varkappa; \tag{41}$$

$$p_1 \geqq 0, \quad p_3 \geqq 0, \quad p_4 \geqq 0, \dots; \tag{42}$$

$$-\mu - 2\varkappa \leqq p_2 \leqq -\mu - \varkappa \tag{43}$$

und wo $K_5(p, \mu)$ *eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom System* (p) *und von der Zahl* μ *abhängt.*

---

[9]) Siehe Fußnote [6]).

Vorbemerkung. Wegen (41) und (43) ist

$$p_1 + 3p_3 + 4p_4 + \ldots = -\varkappa - 2p_2 \leqq -\varkappa + 2(\mu + 2\varkappa) = 2\mu + 3\varkappa,$$

so daß mit Rücksicht auf (42) die Anzahl der Elemente vom System (p) beschränkt (nämlich $\leqq 2\mu + 3\varkappa$) ist, und die Summe in (40) aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Beweis. Nach (11), (30) und (37) ist

$$\chi_\mu(\eta) = i^\mu \pi^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\mu)!} (f''(y))^{-\mu-\frac{1}{2}} Q_{2\mu}(y),$$

so daß der Spezialfall von (40) mit $\varkappa = 0$ unmittelbar aus dem vorigen Hilfssatz mit $k = 2\mu$ und mit $p_2 = -\mu$ folgt.

Es sei $\varkappa \geqq 1$ und es sei der Hilfssatz mit $\varkappa - 1$ statt $\varkappa$ schon bewiesen. Alsdann ist

$$(44)\quad \chi_\mu^{(\varkappa-1)}(\eta) = \sum_{(q)} K_5(q,\mu)\, g^{(q_1)}(y) (f''(y))^{q_2-\frac{1}{2}} (f'''(y))^{q_3} (f^{\mathrm{IV}}(y))^{q_4} \ldots$$

mit

$$(45)\quad \begin{cases} q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + \ldots = -\varkappa + 1; \\ q_1 \geqq 0, \quad q_3 \geqq 0, \quad q_4 \geqq 0, \ldots; \\ -\mu - 2\varkappa + 2 \leqq q_2 \leqq -\mu - \varkappa + 1. \end{cases}$$

Aus (44) folgt (40); denn differentiiert man die linke bzw. rechte Seite von (44) nach y, und multipliziert man das Resultat mit $\frac{1}{f''(y)}$, so erhält man wegen (20) die linke bzw. rechte Seite von (40), und dann ist

$$(46)\quad \begin{cases} p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots \quad q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots - 1; \\ p_1 \geqq 0, \quad p_3 \geqq 0, \quad p_4 \geqq 0, \ldots; \\ q_2 - 2 \leqq p_2 \leqq q_2 - 1. \end{cases}$$

Aus (46) und (45) folgen (41), (42) und (43).

Hilfssatz 5. *Für jedes feste ganze $\varkappa \geqq 0$ und jedes feste ganze $\mu \geqq 0$ ist*

$$(47)\quad \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = O \sum_{p=0}^{2\mu+3\varkappa} \frac{|g^{(p)}(y)|}{(f''(y))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}}$$

und

$$(48)\quad \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = O\, \frac{e^{r(y)}}{x^{2\mu+\varkappa}},$$

beide gleichmäßig in y.

Beweis. Aus (9), (40) und (2) folgt

$$(49)\qquad \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = (f''(y)^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}\, O\sum_{(p)} |g^{(p_1)}(y)| \cdot \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}(-1+2p_2+3p_3+\ldots)}}{x^{3p_3+4p_4+\ldots}}$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen, für die (41), (42) und (43) gelten, also

$$\begin{aligned} p_1 &= -\varkappa - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 - \ldots && \text{wegen (41)},\\ &\leqq -\varkappa - 2p_2 && \text{wegen (42)},\\ &\leqq -\varkappa + 2(\mu+2\varkappa) = 2\mu+3\varkappa && \text{wegen (43)}, \end{aligned}$$

so daß p_1 durch die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2\mu+3\varkappa$ läuft.

Der Exponent im Zähler des letzten Bruches von (49) ist wegen (41) gleich $\frac{1}{2}(-\varkappa - p_1 - 1)$, und der Exponent im Nenner dieses Bruches $\geqq 0$ wegen (42), so daß (47) unmittelbar aus (49) folgt. Aber aus (49) und (4) folgt auch noch

$$\begin{aligned} \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} &= (f(y))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}} \cdot O\sum_{(p)} \frac{e^{r(y)}(f''(y))^{\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}}}{x^{p_1}} \cdot \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}(-\varkappa-p_1-1)}}{x^{3p_3+4p_4+\ldots}}\\ &= O\, e^{r(y)} \sum_{(p)} \frac{1}{x^{p_1+3p_3+4p_4+\ldots}}\\ &= O\, e^{r(y)} \sum_{(p)} \frac{1}{x^{-\varkappa-2p_2}} \end{aligned}$$

(wegen (41))

$$= O\frac{e^{r(y)}}{x^{-\varkappa+2(\mu+\varkappa)}} = O\frac{e^{r(y)}}{x^{2\mu+\varkappa}}$$

wegen (43), womit Hilfssatz 5 vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Für jedes feste ganze $\varkappa \geqq 0$, jedes feste ganze $\mu \geqq 0$ und jedes feste R ist*

$$(50)\qquad e^{-\varrho(\alpha)} \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\alpha)}{(\varphi''(\alpha))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right)$$

und

$$(51)\qquad e^{-\varrho(\beta)} \frac{\chi_\mu^{(\varkappa)}(\beta)}{(\varphi''(\beta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right).$$

Beweis. Wegen (47) und $\varrho(\alpha) = r(a)$ ist die linke Seite von (50) gleich

$$O\sum_{p=0}^{2\mu+3\varkappa} e^{-r(a)} \frac{|g^{(p)}(a)|}{(f''(a))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right)$$

nach (5); wegen (47) und $\varrho(\beta) = r(b)$ ist die linke Seite von (51) gleich

$$O\sum_{p=0}^{2\mu+3\varkappa} e^{-r(b)} \frac{|g^{(p)}(b)|}{(f''(b))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^R}\right)$$

nach (6).

Nach diesen Hilfsbetrachtungen werde ich Behauptung 2 beweisen.

Wegen (48) und (47) ist bei geeignet gewählten nur von μ und $\varkappa$ abhängigen $K_6(\mu, \varkappa)$ und $K_7(\mu, \varkappa)$ für jedes $x \geqq K_6(\mu, \varkappa)$

$$e^{-\varrho(\eta)} \frac{|\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)|}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} \leqq \frac{K_7(\mu, \varkappa)}{x^{2\mu+\varkappa}} \tag{52}$$

und

$$\frac{|\chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta)|}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} \leqq K_7(\mu, \varkappa) \sum_{p=0}^{2\mu+3\varkappa} \frac{|g^{(p)}(y)|}{(f''(y))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}}. \tag{53}$$

Ich wähle jetzt eine von x abhängige ganze Zahl $\tau \geqq 1$, die mit x unbeschränkt wächst, mit den Eigenschaften

$$\tau \leqq x, \quad K_6(\mu, \varkappa) \leqq x, \quad K_7(\mu, \varkappa) \leqq x \tag{54}$$

für jedes ganze nicht-negative $\mu \leqq \tau$ und jedes ganze nicht-negative $\varkappa \leqq \tau$.

Ich behaupte, daß die Funktion

$$\chi(\eta) = \sum_{\mu=0}^{\tau} \chi_\mu(\eta) \tag{55}$$

Beziehung (12) erfüllt; denn da $\varkappa$ und ν fest sind und τ mit x unbeschränkt wächst, ist bei hinreichend großem x $\varkappa \leqq \tau$ und $\nu + 2 \leqq \tau$, also, falls σ die kleinste ganze nicht-negative Zahl $\geqq \nu$ bezeichnet,

$$\begin{aligned}
\chi^{(\varkappa)}(\eta) &= \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) + \chi_\sigma^{(\varkappa)}(\eta) + \sum_{\mu=\sigma+1}^{\tau} \chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) \\
&= \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) + O\frac{e^{\varrho(\eta)}(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}}{x^{2\sigma+\varkappa}} \\
&\qquad + O\sum_{\mu=\sigma+1}^{\tau} \frac{x e^{\varrho(\eta)}(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}}{x^{2\mu+\varkappa}}
\end{aligned}$$

(wegen (52) mit $\sigma \leqq \mu \leqq \tau$ und wegen (54))

$$= \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu^{(\varkappa)}(\eta) + O\frac{e^{\varrho(\eta)}(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}}{x^{2\nu+\varkappa}}$$

wegen $\sigma \geqq \nu$ und $\tau \leqq x$ (vgl. (54)).

Hiermit ist Behauptung 2 bewiesen. Jetzt werden wir Behauptung 6 ableiten, d. h. wir werden zeigen, daß alle Formeln in Voraussetzung 3 bei der genannten Vertauschung und Ersetzung richtig bleiben; dabei wird vorausgesetzt, daß $\chi(\eta)$ eine beliebige Funktion ist, für die (12) gilt. Dann ist $\chi(\eta)$ im Intervall $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$ unendlich oft differentiierbar; für

jedes feste ganze $\varkappa \geqq 0$ ist wegen (12) mit $\nu = 0$

$$e^{-\varrho(\eta)} \frac{\chi^{(\varkappa)}(\eta)}{(\varphi''(\eta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^{\varkappa}}\right)$$

gleichmäßig in η, und für jedes feste R und jedes feste ganze $\varkappa \geqq 0$ ist wegen (12) und (50)

$$e^{-\varrho(\alpha)} \frac{\chi^{(\varkappa)}(\alpha)}{(\varphi''(\alpha))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \frac{R-\varkappa}{2} \\ \mu \text{ ganz}}} e^{-\varrho(\alpha)} \frac{\chi_{\mu}^{(\varkappa)}(\alpha)}{(\varphi''(\alpha))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{x^R}\right) = O\left(\frac{1}{x^R}\right),$$

wegen (12) und (51)

$$e^{-\varrho(\beta)} \frac{\chi^{(\varkappa)}(\beta)}{(\varphi''(\beta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \frac{R-\varkappa}{2} \\ \mu \text{ ganz}}} e^{-\varrho(\beta)} \frac{\chi_{\mu}^{(\varkappa)}(\beta)}{(\varphi''(\beta))^{\frac{1}{2}\varkappa+\frac{1}{4}}} + O\left(\frac{1}{x^R}\right) = O\left(\frac{1}{x^R}\right),$$

so daß auch Behauptung 6 bewiesen ist.

III. Beweis der Behauptungen 3 und 9.

Behauptung 9 besagt: Gilt (12), so ist

56)
$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} = \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} \\ &+ O\left\{ \frac{e^{\varrho(\alpha)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\varphi''(\alpha)}} + \sqrt[4]{\varphi''(\alpha)} \right) + \frac{1}{x^R} \int_a^{\beta} e^{\varrho(\eta)} \left((\varphi''(\eta))^{\frac{1}{4}} + (\varphi''(\eta))^{\frac{3}{4}} \right) d\eta \right\}. \end{aligned} \right.$$

Aber diese Behauptung folgt unmittelbar aus Behauptung 3. Denn gilt (12), so gilt auch (13), also nach Behauptung 3 auch die approximative Funktionalgleichung (14), und hierin ist

$$r(a) = \varrho(\alpha), \qquad r(y) = \varrho(\eta) \qquad \text{wegen (10)},$$

(57)
$$\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} = \frac{1}{\sqrt[4]{\varphi''(\alpha)}} + \sqrt[4]{\varphi''(\alpha)} \qquad \text{wegen (9)}$$

und

(58)
$$\left\{ (f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}} \right\} dy = \left\{ (\varphi''(\eta))^{\frac{1}{4}} + (\varphi''(\eta))^{\frac{3}{4}} \right\} d\eta$$

wegen (9) und (20).

Wir brauchen also nur Behauptung 3 zu beweisen.

Hilfssatz 7. *Ist* $a \leqq A < B \leqq b$ *und*

(59)
$$(B - A) \operatorname*{Min}_{A \leqq y \leqq B} \sqrt{f''(y)} = O(x),$$

dann ist für jedes Zahlenpaar y_1 und y_2 im Intervall $A \leqq y \leqq B$

$$f''(y_2) = O f''(y_1) \quad \text{und} \quad e^{r(y_2)} = O e^{r(y_1)}, \tag{60}$$

und zwar gleichmäßig in y_1 und y_2.

Beweis. Nimmt $f''(y) (A \leqq y \leqq B)$ im Punkte y_0 den kleinsten Wert an, so ist für jedes y im Intervall $A \leqq y \leqq B$

$$\frac{1}{\sqrt{f''(y_0)}} - \frac{1}{\sqrt{f''(y)}} \leqq \frac{1}{2} \int_A^B \frac{|f'''(y)|}{(f''(y))^{\frac{3}{2}}} dy = O\,\frac{B-A}{x^3}$$

wegen (2) mit $k = 3$. Bei hinreichend großem x ist also wegen (59)

$$\frac{1}{\sqrt{f''(y_0)}} - \frac{1}{\sqrt{f''(y)}} \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f''(y_0)}},$$

und hieraus folgt

$$f''(y) \leqq 4 f''(y_0). \tag{61}$$

Hiermit ist die erste der Beziehungen (60) bewiesen.

Weiter ist wegen (3)

$$|r(y_1) - r(y_2)| = O \int_A^B \frac{\sqrt{f''(y)}}{x} dy$$

$$= O\,\frac{(B-A)\sqrt{f''(y_0)}}{x}$$

(wegen (61)),

$$= O(1)$$

wegen (59), also

$$e^{r(y_2)} = e^{r(y_1)} \cdot e^{r(y_2) - r(y_1)} = e^{r(y_1)} \cdot e^{O(1)} = O\, e^{r(y_1)},$$

womit Hilfssatz 7 vollständig bewiesen ist.

Definition von Voraussetzung H. *Ich werde sagen, daß die Funktion $H(u)$ Voraussetzung H erfüllt, wenn sie im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ definiert, unabhängig von x, unendlich oft differentiierbar ist, und die Eigenschaft*

$$H(0) = 1, \quad H(1) = 0, \quad H^{(k)}(0) = H^{(k)}(1) = 0 \qquad (k \geqq 1) \tag{62}$$

besitzt.

Z. B. die Funktion

$$H(u) = \frac{\int_u^1 e^{\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}} dv}{\int_0^1 e^{\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v}} dv} \tag{63}$$

erfüllt Voraussetzung H; denn die k-te Derivierte (k ganz $\geqq 1$) des Zählers in (63) ist

$$-\frac{d^{k-1} e^{\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}}}{du^{k-1}} = 0 \quad \text{in den Punkten } u = 0 \text{ und } u = 1.$$

Hilfssatz 8. *Beim Beweis von Behauptung* 3 *kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit*

$$(b-a) \operatorname*{Min}_{a \leqq y \leqq b} \sqrt{f''(y)} = O(x) \tag{64}$$

vorausgesetzt werden.

Vorbemerkung. Gibt (64), so ist nach Hilfssatz 7

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{r(y)} \left\{ f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}} \right\} dy &= O(b-a)\, e^{r(a)} \left\{ (f''(a))^{\frac{1}{4}} + (f''(a))^{\frac{3}{4}} \right\} \\ &= O \frac{x}{\sqrt{f''(a)}} \cdot e^{r(a)} \left\{ (f''(a))^{\frac{1}{4}} + (f''(a))^{\frac{3}{4}} \right\} \\ &= O\, x\, e^{r(a)} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} \right\},\end{aligned}$$

so daß dann die approximative Funktionalgleichung (14) mit $R+1$ statt R die Gestalt

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} &= \sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \\ &\quad + O \frac{e^{r(a)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} \right) \end{aligned} \right. \tag{65}$$

annimmt.

Beweis. Es sei Behauptung 3 unter Annahme von (64) bewiesen und allgemein zu beweisen.

Erster Schritt. Wir dürfen

$$(b-a) \operatorname*{Min}_{a \leqq y \leqq b} \sqrt{f''(y)} > 4x \tag{66}$$

voraussetzen, da sonst (64) gilt, also nichts zu beweisen ist. Es werde gesetzt

$$a_0 = a, \qquad a_{h+1} = a_h + \frac{x}{\sqrt{f''(a_h)}} \qquad (0 \leqq h \leqq n), \tag{67}$$

wo die ganze Zahl n eindeutig bestimmt wird durch die Ungleichungen

$$a_n < b \leqq a_{n+1} \tag{68}$$

(für jedes h mit $a_h < b$ ist wegen (67)

$$h \leqq (a_h - a_0) \cdot \frac{1}{x} \operatorname*{Max}_{a \leqq y \leqq b} \sqrt{f''(y)} < \frac{b-a}{x} \operatorname*{Max}_{a \leqq y \leqq b} \sqrt{f''(y)};$$

es gibt also nur endlich viele h mit $a_h < b$, so daß es gewiß ein n mit (68) gibt).

Aus (67) folgt

$$n+1 \geqq (a_{n+1}-a_0)\frac{1}{x}\operatorname*{Min}_{a\leqq y\leqq b}\sqrt{f''(y)} \geqq \frac{b-a}{x}\operatorname*{Min}_{a\leqq y\leqq b}\sqrt{f''(y)}$$

wegen (68), so daß wir mit Rücksicht auf (66) finden, daß $n \geqq 4$ ist.

Es bezeichne $H(u)$ eine Funktion, die Voraussetzung H erfüllt, und es werde gesetzt

$$2m = n-1 \quad \text{oder} \quad n-2, \tag{69}$$

je nachdem n ungerade oder gerade ist (also $m \geqq 1$),

$$a_{2h} = v_h \ (0 \leqq h \leqq m); \quad a_{2h+1} = w_h \ (0 \leqq h \leqq m-1); \quad b = w_m, \tag{70}$$

$$s(y) = g(y) \qquad \text{im Intervall} \quad v_0 \leqq y < w_0, \tag{71}$$

$$s(y) = g(y)\,H\left(\frac{y-w_{h-1}}{v_h-w_{h-1}}\right) \qquad \text{im Intervall} \quad w_{h-1} \leqq y < v_h \ (1 \leqq h \leqq m), \tag{72}$$

$$s(y) = g(y)\,H\left(\frac{w_h-y}{w_h-v_h}\right) \qquad \text{im Intervall} \quad v_h \leqq y < w_h \ (1 \leqq h \leqq m-1), \tag{73}$$

$$s(y) = 0 \qquad \text{im Intervall} \quad v_m \leqq y \leqq w_m. \tag{74}$$

Zweiter Schritt. Ich behaupte:

1. Die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes dieser Arbeit sind für jedes ganze $h \geqq 0$ und $\leqq m-1$ mit v_h statt a, mit v_{h+1} statt b und $s(y)$ statt $g(y)$ erfüllt.

2. Diese Voraussetzungen sind für jedes ganze $h \geqq 0$ und $\leqq m-1$ auch mit w_h statt a, mit w_{h+1} statt b und $g(y)-s(y)$ statt $g(y)$ erfüllt.

Das werde ich jetzt zeigen.

Um zu beweisen, daß $s(y)$ und $g(y)-s(y)$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$ beliebig oft differentiierbar [10]) sind, braucht man nur die Teilpunkte w_h $(0 \leqq h \leqq m-1)$ und v_h $(1 \leqq h \leqq m)$ zu untersuchen, da es in den übrigen Punkten unmittelbar klar ist. Wir brauchen nur zu zeigen, daß in den genannten Teilpunkten für jedes ganze $k \geqq 1$ die k-te Derivierte von $s(y)$ nach rechts und die k-te Derivierte dieser Funktion nach links existieren und gleich sind.

In den Teilpunkten v_h $(1 \leqq h \leqq m)$ ist

$$\begin{aligned} s(y) &= g(y)H(1) && \text{wegen (73)} \\ &= 0 && \text{wegen (62);} \end{aligned}$$

[10]) Siehe Fußnote [1]).

wegen (72) bzw. (73) ist für $y \to v_h$

$$s(y) \to g(y)\, H(1) = 0;$$

$s(y)$ ist also in den Teilpunkten v_h $(1 \leqq h \leqq m)$ stetig.

In den Teilpunkten w_h $(0 \leqq h \leqq m-1)$ ist

$$\begin{aligned} s(y) &= g(y)\, H(0) && \text{wegen (72)} \\ &= g(y) && \text{wegen (62);} \end{aligned}$$

wegen (72) bzw. (73) ist für $y \to w_h$

$$s(y) \to g(y)\, H(0) = g(y),$$

so daß $s(y)$ auch in den Teilpunkten w_h $(0 \leqq h \leqq m-1)$, also im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ stetig ist.

In den Teilpunkten v_h $(1 \leqq h \leqq m-1)$ ist die k-te Derivierte $(k \geqq 1)$ von $s(y)$ nach rechts

$$\frac{d^k}{dy^k}\left(g(y)\, H\left(\frac{w_h - y}{w_h - v_h}\right)\right)_{y=v_h} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{(w_h - v_h)^p} \binom{k}{p} g^{(k-p)}(v_h)\, H^{(p)}(1) = 0$$

wegen (62), und wegen (74) verschwindet auch im Punkte v_m die k-te Derivierte von $s(y)$ nach rechts.

Formel (72), die wegen der Stetigkeit von $s(y)$ auch im abgeschlossenen Intervall $w_{h-1} \leqq y \leqq v_h$ gültig ist, zeigt, daß in den Teilpunkten v_h $(1 \leqq h \leqq m)$ die k-te Derivierte $(k \geqq 1)$ von $s(y)$ nach links

$$\frac{d^k}{dy^k}\left(g(y)\, H\left(\frac{y - w_{h-1}}{v_h - w_{h-1}}\right)\right)_{y=v_h} = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{(v_h - w_{h-1})^p} \binom{k}{p} g^{(k-p)}(v_h)\, H^{(p)}(1) = 0$$

wegen (62) ist. Hiermit ist gezeigt, daß $s(y)$ in den Teilpunkten v_h $(1 \leqq h \leqq m)$ unendlich oft differentiierbar ist, und zwar mit

$$(75) \qquad \begin{cases} s^{(k)}(v_h) = 0 & (k \geqq 0,\ 1 \leqq h \leqq m); \\ s^{(k)}(v_0) = g^{(k)}(a). \end{cases}$$

In den Teilpunkten w_h $(0 \leqq h \leqq m-1)$ ist die k-te Derivierte $(k \geqq 1)$ von $s(y)$ nach rechts wegen (72)

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dy^k}\left(g(y)\, H\left(\frac{y - w_h}{v_{h+1} - w_h}\right)\right)_{y=w_h} &= \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{(v_{h+1} - w_h)^p} \binom{k}{p} g^{(k-p)}(w_h)\, H^{(p)}(0) \\ &= g^{(k)}(w_h) \end{aligned}$$

wegen (62). Mit Rücksicht hierauf und auf (71) ergibt sich sofort, daß $s(y)$ im Punkte w_0 beliebig oft differentiierbar ist, und Formel (73), die wegen der Stetigkeit von $s(y)$ im abgeschlossenen Intervall $v_h \leqq y \leqq w_h$

$(1 \leqq h \leqq m-1)$ gültig ist, zeigt, daß in den Teilpunkten w_h $(1 \leqq h \leqq m-1)$ die k-te Derivierte $(k \geqq 1)$ von $s(y)$ nach links

$$\frac{d^k}{dy^k}\left(g(y)\,H\left(\frac{w_h-y}{w_h-v_h}\right)\right)_{y=w_h} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{(w_h-v_h)^p}\binom{k}{p} g^{(k-p)}(w_h)\,H^{(p)}(0) = g^{(k)}(w_h)$$

wegen (62) ist, so daß $s(y)$ in den Teilpunkten $w_h (0 \leqq h \leqq m-1)$ unendlich oft differentiierbar ist, und zwar mit

$$(76) \qquad \begin{cases} s^{(k)}(w_h) = g^{(k)}(w_h) & (k \geqq 0,\ 0 \leqq h \leqq m-1); \\ s^{(k)}(w_m) = 0 & (k \geqq 0). \end{cases}$$

Wir wissen also jetzt, daß $s(y)$ und $g(y)-s(y)$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$ beliebig oft differentiierbar[11]) sind.

Im Intervall $v_0 \leqq y \leqq w_0$ ist wegen (71) und (4)

$$(77) \qquad e^{-\tau(y)}\,\frac{s^{(k)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

In den Intervallen $w_{h-1} \leqq y \leqq v_h$ $(1 \leqq h \leqq m)$ ist wegen (72)

$$(78) \qquad s^{(k)}(y) = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{(v_h-w_{h-1})^p}\binom{k}{p} g^{(k-p)}(y)\,H^{(p)}\left(\frac{y-w_{h-1}}{v_h-w_{h-1}}\right).$$

Hierin ist wegen (67) und (70)

$$v_h - w_{h-1} = \frac{x}{\sqrt{f''(w_{h-1})}},$$

so daß nach Hilfssatz 7 (mit $A = w_{h-1}$, $B = v_h$) für jedes y im Intervall $w_{h-1} \leqq y \leqq v_h$

$$(79) \qquad \frac{1}{v_h-w_{h-1}} = O\,\frac{\sqrt{f''(y)}}{x}$$

ist, und da $H(u)$ unabhängig von x ist, ist bei festem ganzen $p \geqq 0$

$$(80) \qquad H^{(p)}\left(\frac{y-w_{h-1}}{v_h-w_{h-1}}\right) = O(1).$$

Aus (78), (79), (4) mit $k-p$ statt k und (80) folgt, daß die linke Seite von (77) den Wert

$$(81) \qquad O\,\frac{1}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}} \sum_{p=0}^{k} \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}p}}{x^p} \cdot \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}(k-p)+\frac{1}{4}}}{x^{k-p}} = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

hat, so daß (77) gilt, und diese Beziehung ist natürlich wegen (74) auch im Intervall $v_m \leqq y \leqq w_m$ gültig.

---

[11]) Siehe Fußnote [1]).

Gilt diese Relation (77) auch in den Intervallen

$$v_h \leqq y \leqq w_h \; (1 \leqq h \leqq m-1)?$$

In diesen Intervallen ist wegen (73)

$$s^{(k)}(y) = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{(w_h - v_h)^p} \binom{k}{p} g^{(k-p)}(y) \, H^{(p)}\left(\frac{w_h - y}{w_h - v_h}\right). \tag{82}$$

Hierin ist wegen (67) und (70)

$$w_h - v_h = \frac{x}{\sqrt{f''(v_h)}},$$

also nach Hilfssatz 7 (mit $A = v_h$, $B = w_h$) für jedes y im Intervall $v_h \leqq y \leqq w_h$

$$\frac{1}{w_h - v_h} = O\frac{\sqrt{f''(y)}}{x}, \tag{83}$$

und es ist

$$H^{(p)}\left(\frac{w_h - y}{w_h - v_h}\right) = O(1). \tag{84}$$

Aus (82), (83), (4) mit $k - p$ statt k und (84) folgt, daß die linke Seite von (77) auch in diesen Intervallen den durch (81) angegebenen Wert besitzt, so daß (77) im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ gilt.

Aus (4) und (77) ergibt sich

$$e^{-r(y)} \frac{g^{(k)}(y) - s^{(k)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}}} = O\left(\frac{1}{x^k}\right),$$

so daß Formel (4) mit $s(y)$ statt $g(y)$ und auch mit $g(y) - s(y)$ statt $g(y)$ richtig ist.

(75) zeigt, daß die Formeln (5) und (6) mit $s(y)$ statt $g(y)$, mit v_h statt a und mit v_{h+1} statt b $(0 \leqq h \leqq m-1)$ richtig sind; (76) zeigt, daß diese Formeln mit $g(y) - s(y)$ statt $g(y)$, mit w_h statt a und mit w_{h+1} statt b $(0 \leqq h \leqq m-1)$ gelten.

Hiermit ist der zweite Schritt getan.

Dritter Schritt. Ich behaupte, daß (64) richtig ist mit v_h statt a und mit v_{h+1} statt b $(0 \leqq h \leqq m-1)$, und auch mit w_h statt a und mit w_{h+1} statt b $(0 \leqq h \leqq m-1)$. Denn wegen (67) und (70) ist für jedes $h \geqq 0$ und $\leqq m-1$

$$v_{h+1} - v_h = (v_{h+1} - w_h) + (w_h - v_h) = \frac{x}{\sqrt{f''(w_h)}} + \frac{x}{\sqrt{f''(v_h)}},$$

also

$$(v_{h+1} - v_h) \operatorname*{Min}_{v_h \leqq y \leqq v_{h+1}} \sqrt{f''(y)} \leqq 2x,$$

und wegen (67) und (70) ist für jedes $h \geqq 0$ und $\leqq m-2$

$$w_{h+1} - w_h = (w_{h+1} - v_{h+1}) + (v_{h+1} - w_h) = \frac{x}{\sqrt{f''(v_{h+1})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(w_h)}},$$

also

$$(w_{h+1} - w_h) \operatorname*{Min}_{w_h \leqq y \leqq w_{h+1}} \sqrt{f''(y)} \leqq 2x,$$

so daß wir nur noch das Intervall $w_{m-1} \leqq y \leqq w_m$ zu untersuchen brauchen.

Ist n ungerade, also nach (69) $2m = n-1$, so ist wegen (70) und (68)

$$w_m - w_{m-1} = b - w_{m-1} \leqq a_{2m+2} - a_{2m-1} = (a_{2m+2} - a_{2m+1})$$
$$+ (a_{2m+1} - a_{2m}) + (a_{2m} - a_{2m-1}) = \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m+1})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(a_{m-1})}}$$

wegen (67), also

$$(w_m - w_{m-1}) \operatorname*{Min}_{w_{m-1} \leqq y \leqq w_m} \sqrt{f''(y)} \leqq 3x.$$

Ist n gerade, also nach (69) $2m = n-2$, so ist wegen (70) und (68)

$$w_m - w_{m-1} = b - w_{m-1} \leqq a_{2m+3} - a_{2m-1}$$
$$= (a_{2m+3} - a_{2m+2}) + (a_{2m+2} - a_{2m+1}) + (a_{2m+1} - a_{2m}) + (a_{2m} - a_{2m-1})$$
$$= \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m+2})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m+1})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m})}} + \frac{x}{\sqrt{f''(a_{2m-1})}},$$

also

$$(w_m - w_{m-1}) \operatorname*{Min}_{w_{m-1} \leqq y \leqq w_m} \sqrt{f''(y)} \leqq 4x.$$

Vierter und letzter Schritt. Wir haben beim zweiten und dritten Schritt gezeigt, daß die Voraussetzungen des Satzes dieser Arbeit und auch Relation (64) für jedes ganze $h \geqq 0$ und $\leqq m-1$ mit v_h statt a, mit v_{h+1} statt b und mit $s(y)$ statt $g(y)$ erfüllt sind. Nach unserer Annahme gilt dann auch Behauptung 3, d. h. Relation (65) mit v_h statt a, v_{h+1} statt b und $s(y)$ statt $g(y)$. Hieraus folgt: wird für jedes ganze $\mu \geqq 0$ im Intervall $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$

$$(85)\quad \sigma_\mu(\eta) = i^\mu \pi^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{(2\mu)!} (\varphi''(\eta))^{\mu+\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \left\{ \frac{d^{2\mu}}{dz^{2\mu}} s(y+z)\, e^{2\pi i (f(y+z) - f(y) - z f'(y) - \frac{1}{2} z^2 f''(y))} \right\}_{z=0}$$

gesetzt, so gibt es im Intervall $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$ Funktionen $\sigma(\eta)$, mit der Eigenschaft, daß für jedes feste ν

$$(86)\qquad \sigma(\eta) = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} \sigma_\mu(\eta) + O\, e^{\varrho(\eta)} x^{-2\nu} \sqrt[4]{\varphi''(\eta)}$$

gleichmäßig in η ist, und für jede dieser Funktionen gilt die approximative Funktionalgleichung

$$(87)\quad \left\{ \sum_{\substack{v_h \leqq n \leqq v_{h+1} \\ n \text{ ganz}}} s(n)\, e^{2\pi i f(n)} - \sum_{\substack{f'(v_h) \leqq \nu \leqq f'(v_{h+1}) \\ \nu \text{ ganz}}} \sigma(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \right. \\ \left. = O\left\{ \frac{e^{r(v_h)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(v_h)}} + \sqrt[4]{f''(v_h)} \right) \right\}.$$

Im Intervall $v_0 \leqq y \leqq w_0$ ist $s(y) = g(y)$ wegen (71), also $\sigma_\mu(\eta) = \chi_\mu(\eta)$ wegen (85) und (11), so daß nach (13) in diesem Intervall (86) mit $\sigma(\eta) = \chi(\eta)$ gilt. Bequemlichkeitshalber setze ich darum

$$(88)\qquad \sigma(\eta) = \chi(\eta)$$

im Intervall $v_0 \leqq y \leqq w_0$.

Beim zweiten und dritten Schritt haben wir auch gezeigt, daß die Voraussetzungen unseres Satzes für jedes $h \geqq 0$ und $\leqq m-1$ mit w_h statt a, mit w_{h+1} statt b, und mit $g(y) - s(y)$ statt $g(y)$ erfüllt sind. Relation (65) gilt somit mit w_h statt a, w_{h+1} statt b, $g(y) - s(y)$ statt $g(y)$. Wird in (11) $g(y)$ durch $g(y) - s(y)$ ersetzt, dann wird die linke Seite von (11) wegen (11) und (85) durch $\chi_\mu(\eta) - \sigma_\mu(\eta)$ ersetzt, so daß es im Intervall $\alpha \leqq \eta \leqq \beta$ Funktionen $\tau(\eta)$ gibt mit der Eigenschaft, daß für jedes feste ν

$$(89)\qquad \tau(\eta) = \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \nu \\ \mu \text{ ganz}}} (\chi_\mu(\eta) - \sigma_\mu(\eta)) + O\, e^{\varrho(n)} x^{-2\nu} \sqrt[4]{\varphi''(\eta)}$$

gleichmäßig in η ist, und für jede dieser Funktionen $\tau(\eta)$ gilt die approximative Funktionalgleichung

$$(90)\quad \left\{ \sum_{\substack{w_h \leqq n \leqq w_{h+1} \\ n \text{ ganz}}} (g(n) - s(n))\, e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\substack{f'(w_h) \leqq \nu \leqq f'(w_{h+1}) \\ \nu \text{ ganz}}} \tau(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \right. \\ \left. = O\left\{ \frac{e^{r(w_h)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(w_h)}} + \sqrt[4]{f''(w_h)} \right) \right\}.$$

Wegen (13) und (86) gilt im Intervall $w_0 \leqq y \leqq v_m$ (89) mit $\tau(\eta) = \chi(\eta) - \sigma(\eta)$, so daß wir in (90)

$$(91)\qquad \tau(\eta) = \chi(\eta) - \sigma(\eta) \quad (w_0 \leqq y \leqq v_m)$$

setzen dürfen. Im Intervall $v_m \leqq y \leqq w_m$ ist $s(y) = 0$ wegen (74), also $\sigma_\mu(\eta) = 0$ wegen (85), so daß nach (13) in diesem Intervall (89) mit $\tau(\eta) = \chi(\eta)$ gilt. Bequemlichkeitshalber setze ich darum

$$(92)\qquad \tau(\eta) = \chi(\eta), \quad \sigma(\eta) = 0$$

im Intervall $v_m \leqq y \leqq w_m$.

Es ist jetzt nicht schwer zu beweisen, was wir beweisen wollen. Wir haben schon bemerkt, daß für $0 \leqq h \leqq m-1$

$$(v_{h+1} - v_h) \operatorname*{Min}_{v_h \leqq y \leqq v_{h+1}} \sqrt{f''(y)} = O(x)$$

ist, so daß nach Hilfssatz 7 für jedes y im Intervall $v_h \leqq y \leqq v_{h+1}$

$$(f''(v_h))^{\frac{1}{4}} + (f''(v_h))^{\frac{3}{4}} = O\{(f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\} \tag{93}$$

und

$$e^{r(v_h)} = O\, e^{r(y)} \tag{94}$$

gleichmäßig in y ist. Wegen

$$v_{h+1} - v_h > w_h - v_h = \frac{x}{\sqrt{f''(v_h)}}$$

erhalten wir

$$\left\{ \begin{aligned} & e^{r(v_h)} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(v_h)}} + \sqrt[4]{f''(v_h)} \right) < e^{r(v_h)} \frac{(f''(v_h))^{\frac{1}{4}} + (f''(v_h))^{\frac{3}{4}}}{x} \cdot (v_{h+1} - v_h) \\ & \qquad = O \frac{1}{x} \int_{v_h}^{v_{h+1}} e^{r(y)} \{(f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\}\, dy, \end{aligned} \right. \tag{95}$$

so daß das Restglied in (87) durch

$$O \frac{1}{x^{R+1}} \int_{v_h}^{v_{h+1}} e^{r(y)} \{(f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\}\, dy \tag{96}$$

ersetzt werden kann. Aus

$$(w_{h+1} - w_h) \operatorname*{Min}_{w_h \leqq y \leqq w_{h+1}} \sqrt{f''(y)} = O(x)$$

und

$$w_{h+1} - w_h > v_{h+1} - w_h = \frac{1}{\sqrt{f''(w_h)}}$$

$(0 \leqq h \leqq m-1)$ folgt, daß die Relationen (93), (94) und (95) mit w_h statt v_h gelten, so daß das Restglied in (90) durch

$$O \frac{1}{x^{R+1}} \int_{w_h}^{w_{h+1}} e^{r(y)} \{(f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\}\, dy \tag{97}$$

ersetzt werden kann.

Ich summiere (87) und (90) über $h = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Die Glieder der ersten Summe von (87) bzw. (90) mit $n = v_h$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ bzw. $n = w_h$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ werden dann zwar doppelt in Anschlag gebracht, aber diese Glieder sind null wegen (75) mit $k = 0$ bzw. (76)

mit $k = 0$. Die Glieder der zweiten Summe von (87) bzw. (90) mit $\nu = f'(v_h)$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ bzw. $\nu = f'(w_h)$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ werden auch doppelt gezählt, aber schaden auch nicht. Denn im Punkte $\eta = f'(v_h)$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ ist $y = v_h$, also $s^{(k)}(y) = 0$ wegen (75), $\sigma_\mu(\eta) = 0$ wegen (85), so daß aus (86) mit $\nu = \frac{R+1}{2}$ folgt

$$\sigma(\eta) = O\, e^{r(v_h)}\, x^{-(R+1)} \frac{1}{\sqrt[4]{f''(v_h)}};$$

das Glied $\sigma(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)}$ mit $\nu = f'(v_h)$ kann also im Restglied aufgenommen werden. Und im Punkte $\eta = f'(w_h)$ $(1 \leqq h \leqq m-1)$ ist $y = w_h$, also $g^{(k)}(y) - s^{(k)}(y) = 0$ wegen (76), $\chi_\mu(\eta) - \sigma_\mu(\eta) = 0$ wegen (11) und (85), so daß aus (89) mit $\frac{R+1}{2}$ statt ν und (91) folgt

$$\tau(\eta) = O\, e^{r(w_h)}\, x^{-(R+1)} \frac{1}{\sqrt[4]{f''(w_h)}};$$

das Glied $\tau(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)}$ mit $\nu = f'(w_h)$ kann also gleichfalls im Restglied aufgenommen werden.

Summiere ich die linke Seite von (87) über $h = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, so erhalte ich wegen (74) und (92), bis auf Glieder, die nach dem obigen im Restglied aufgenommen werden können,

$$(98) \qquad \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} s(n)\, e^{2\pi i f(n)} - \sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} \sigma(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)}.$$

Summiere ich die linke Seite von (90) über $h = 0, 1, \ldots, m-1$, so erhalte ich wegen (71) und (88), bis auf Glieder, die nach dem obigen im Restglied aufgenommen werden können,

$$(99) \qquad \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} (g(n) - s(n))\, e^{2\pi i f(n)} - \sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} (\chi(\nu) - \sigma(\nu))\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)}.$$

Durch Summation der Restglieder (96) und (97) in (87) und (90) bekomme ich das Restglied

$$O \frac{1}{x^{R+1}} \int_a^b e^{r(y)} \{(f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}}\}\, dy,$$

so daß man durch Summation von (98) und (99) die verlangte approximative Funktionalgleichung (14) bekommt.

Hiermit ist Hilfssatz 8 bewiesen.

Weiterhin werde ich in Teil III stets voraussetzen, daß (64) gilt. Nach Hilfssatz 7 ist dann für jedes Zahlenpaar y_1 und y_2 im Intervall $a \leqq y \leqq b$

$$(100) \qquad f''(y_2) = O f''(y_1) \quad \text{und} \quad e^{r(y_2)} = O\, e^{r(y_1)},$$

also insbesondere

$$(101) \qquad (b-a)\sqrt{f''(a)} = O(b-a) \min_{a \leqq y \leqq b} \sqrt{f''(y)} = O(x)$$

und

$$(102) \qquad \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{f''(a)}} = \frac{1}{\sqrt{f''(a)}} \int_a^b f''(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{f''(a)}} \cdot O(b-a) f''(a) = O(x).$$

Hilfssatz 9. *Bezeichnet t entweder die Zahl a oder die Zahl b, dann ist für jedes feste ganze $h \geqq 0$, jedes feste ganze $p \geqq 0$ und jedes feste R*

$$(103) \qquad \begin{cases} g^{(h)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-h-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} |y-t|^p \\ \qquad + O\, e^{r(a)} x^{-R} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}} \end{cases}$$

gleichmäßig in y.

Ist für jedes ganze $k \geqq 0$

$$(104) \qquad g^{(k)}(a) = 0; \quad g^{(k)}(b) = 0; \quad (k \geqq 0),$$

so ist sogar

$$(105) \qquad g^{(h)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-h-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} |y-t|^p$$

gleichmäßig in y.

Beweis. Wegen (100) folgt der Spezialfall mit $p = 0$ unmittelbar aus (4). Es sei $p \geqq 1$ und es sei der Hilfssatz mit $p-1$ statt p schon bewiesen. Alsdann ist nach (103) mit $h+1$ statt h, mit $p-1$ statt p und mit $R+1$ statt R

$$(106) \qquad \begin{cases} g^{(h+1)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-h-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} |y-t|^{p-1} \\ \qquad + O\, e^{r(a)} x^{-R-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}} \end{cases}$$

gleichmäßig in y, wobei das Schlußglied weggelassen werden darf, wenn (104) gilt. Durch Integration von (106) von t bis y erhält man wegen

$$|y-t| \leqq b-a = O\left(\frac{x}{\sqrt{f''(a)}}\right)$$

(vgl. (101))

$$(107) \qquad \begin{cases} g^{(h)}(y) = g^{(h)}(t) + O\, e^{r(a)} x^{-h-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} |y-t|^p \\ \qquad + O\, e^{r(a)} x^{-R-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}} \cdot \frac{x}{\sqrt{f''(a)}}. \end{cases}$$

Aus (107) und (5) bzw. (6) folgt (103); gilt (104), dann ist $g^{(h)}(t) = 0$, und dann darf das Schlußglied in (107) weggelassen werden, so daß dann (105) gilt.

Hilfssatz 10. *Beim Beweis von Behauptung 3 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß (104) für jedes ganze $k \geqq 0$ gilt.*

Beweis. Es sei Behauptung 3 unter Annahme von (104) bewiesen, und allgemein zu beweisen. Wir werden beim Beweis zwei Fälle unterscheiden.

1. Es sei

$$(b-a)\operatorname*{Min}_{a\leqq y\leqq b}\sqrt{f''(y)}\leqq 2. \tag{108}$$

Wegen $|y-t|\leqq b-a$ und (100) ist nach dem vorigen Hilfssatz mit $p\geqq R-h$

$$g^{(h)}(y)=O\,e^{r(a)}x^{-R}(f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}} \tag{109}$$

für jedes feste ganze $h\geqq 0$. Wenden wir Hilfssatz 5 an mit $\varkappa=0$, so erhalten wir aus (47) für jedes feste ganze $\mu\geqq 0$

$$\chi_\mu(\eta)=\frac{1}{\sqrt[4]{f''(y)}}\cdot O\sum_{p=0}^{2\mu}\frac{|g^{(p)}(y)|}{(f''(y))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{f''(y)}}\cdot O\sum_{p=0}^{2\mu}e^{r(a)}x^{-R}$$

(wegen (109))

$$=O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}$$

wegen (100), so daß aus (13) mit $\nu=\frac{R}{2}$ folgt

$$\chi(\eta)=O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\cdot \tag{110}$$

Außerdem ist

$$\left\{\begin{aligned}\beta-\alpha&=\int_a^b f''(y)\,dy=O((b-a)\,f''(a))\quad\text{wegen (100)}\\&=O\left(\sqrt{f''(a)}\right)\end{aligned}\right. \tag{111}$$

wegen (108). Das Resultat ist nun

$$\sum_{\substack{a\leqq n\leqq b\\ n\text{ ganz}}}g(n)\,e^{2\pi i f(n)}-\sum_{\substack{\alpha\leqq\nu\leqq\beta\\ \nu\text{ ganz}}}\chi(\nu)\,e^{-2\pi i\varphi(\nu)}$$

$$=O\left\{(b-a+1)\,e^{r(a)}x^{-R}\sqrt[4]{f''(a)}+(\beta-\alpha+1)\,e^{r(a)}x^{-R}(f''(a))^{-\frac{1}{4}}\right\}$$

(wegen (109) mit $h=0$ und (110))

$$=O\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{f''(a)}}+1\right)e^{r(a)}x^{-R}\sqrt[4]{f''(a)}+\left(\sqrt{f''(a)}+1\right)e^{r(a)}x^{-R}(f''(a))^{-\frac{1}{4}}\right\}$$

(wegen (108) und (111))

$$=O\,e^{r(a)}x^{-R}\left(\sqrt[4]{f''(a)}+\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right),$$

so daß dann die approximative Funktionalgleichung gilt.

2. Es sei

$$(b-a)\operatorname*{Min}_{a\leqq y\leqq b}\sqrt{f''(y)}>2.$$

Dann ist

$$(b-a)\sqrt{f''(a)}>2. \tag{112}$$

Es erfülle $H(u)$ Voraussetzung H, und es werde gesetzt

$$A=a+\frac{1}{\sqrt{f''(a)}},\qquad B=b-\frac{1}{\sqrt{f''(a)}} \tag{113}$$

($A<B$ wegen (112)),

$$s(y)=g(y) \text{ im Intervall } A\leqq y\leqq B; \tag{114}$$

$$=g(y)\,H\Big(\frac{y-B}{b-B}\Big) \text{ im Intervall } B<y\leqq b; \tag{115}$$

$$=g(y)\,H\Big(\frac{A-y}{A-a}\Big) \text{ im Intervall } a\leqq y<A. \tag{116}$$

Aus (113) folgt

$$\frac{1}{A-a}=\frac{1}{b-B}=\sqrt{f''(a)}. \tag{117}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß die Voraussetzungen unseres Satzes mit $s(y)$ statt $g(y)$ erfüllt sind.

Um zu zeigen, daß $s(y)$ im Intervall $a\leqq y\leqq b$ unendlich oft differentiierbar[12]) ist, braucht man nur die Punkte A und B zu untersuchen, da es in den übrigen Punkten selbstverständlich ist. Im Punkte B ist die k-te Derivierte von $s(y)$ nach links $g^{(k)}(B)$ wegen (114) und nach rechts wegen (115)

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{(b-B)^n}\binom{k}{n}g^{(k-n)}(B)\,H^{(n)}(0)=g^{(k)}(B)$$

wegen (62). Im Punkte A ist die k-te Derivierte von $s(y)$ nach rechts $g^{(k)}(A)$ wegen (114) und nach links wegen (116)

$$\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(A-a)^n}\binom{k}{n}g^{(k-n)}(A)\,H^{(n)}(0)=g^{(k)}(A)$$

wegen (62). Die Funktion $s(y)$ ist somit in den Punkten A und B, also im ganzen Intervall $a\leqq y\leqq b$ beliebig oft differentiierbar[12]). Wegen (4) und (114) ist im Intervall $A\leqq y\leqq B$

$$e^{-r(y)}\frac{s^{(k)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}=O\Big(\frac{1}{x^k}\Big). \tag{118}$$

[12]) Siehe Fußnote [1]).

Es werde $t=a$, $T=A$ oder $t=b$, $T=B$ gesetzt. Im Intervall $t \leqq y \leqq T$ bzw. $T \leqq y \leqq t$ ist $|y-t| \leqq \frac{1}{\sqrt{f''(a)}}$; bezeichnet q irgendeine feste Zahl, und wenden wir Hilfssatz 9 an mit $p \geqq q-h$ und $R \geqq q$, so erhalten wir

$$g^{(h)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-q} (f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}} \tag{119}$$

gleichmäßig in y, also

$$\begin{aligned} s^{(k)}(y) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(t-T)^n} \binom{k}{n} g^{(k-n)}(y)\, H^{(n)}\left(\frac{y-T}{t-T}\right) \\ &= O \sum_{n=0}^{k} (f''(a))^{\frac{1}{2}n} \cdot e^{r(a)} x^{-q} (f''(a))^{\frac{1}{2}(k-n)+\frac{1}{4}} \cdot 1 \end{aligned} \tag{120}$$

wegen (117), (119) mit $h=k-n$ und $H^{(n)}(u)=O(1)$, also

$$s^{(k)}(y) = O\, \frac{e^{r(a)}}{x^q} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}, \tag{121}$$

so daß (118) auch in den Intervallen $a \leqq y \leqq A$ und $B \leqq y \leqq b$, also in ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ gilt.

Wegen (120) und (62) ist

$$s^{(k)}(a) = 0, \qquad s^{(k)}(b) = 0 \qquad (k \geqq 0), \tag{122}$$

so daß die Relationen (5) und (6) mit $s(y)$ statt $g(y)$ gelten.

Hiermit ist gezeigt, daß Voraussetzung 3, also alle Voraussetzungen des Satzes dieser Arbeit mit $s(y)$ statt $g(y)$ gelten, und wegen (122) gilt auch (104) mit $s(y)$ statt $g(y)$, so daß nach unserer Annahme Behauptung 3 mit $s(y)$ statt $g(y)$ richtig ist, d. h.:

Wird $\sigma_\mu(\eta)$ durch (85) definiert, dann gibt es Funktionen $\sigma(\eta)$ mit Eigenschaft (86), und für jede dieser Funktionen gilt die approximative Funktionalgleichung (also (65)) mit $s(y)$ statt $g(y)$ und mit $\sigma(\eta)$ statt $\chi(\eta)$. Hiermit ist bewiesen

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} s(n)\, e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} \sigma(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} + O\left\{\frac{e^{r(a)}}{x^R}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)}\right)\right\}. \tag{123}$$

Nach (114) ist

$$\sum_{\substack{A \leqq n \leqq B \\ n \text{ ganz}}} s(n)\, e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\substack{A \leqq n \leqq B \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)}; \tag{124}$$

wegen (114), (85) und (11) ist im Intervall $A \leqq y \leqq B$

$$\sigma_u(\eta) = \chi_u(\eta),$$

also wegen (86) und (13)

$$\sigma(\eta) = \chi(\eta) + O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}},$$

somit

$$(125)\quad \begin{cases} \sum\limits_{f'(A)\leqq\nu\leqq f'(B)} (\sigma(\nu) - \chi(\nu))\, e^{-2\pi i\varphi(\nu)} \\ \qquad = O\,(\beta-\alpha+1)\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}} \\ \qquad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^{R}}\left(\sqrt[4]{f''(a)} + \frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right) \end{cases}$$

nach (102).

Betrachten wir jetzt die Intervalle $a \leqq y < A$ und $B < y \leqq b$. Aus (47) mit $\varkappa = 0$, und (119) mit $h = p$ und $q \geqq R+1$ folgt

$$(126)\qquad \chi_\mu(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{f''(y)}}\, O\sum_{p=0}^{2\mu} e^{r(a)}\, x^{-R-1} = O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}}.$$

Da die Voraussetzungen des Satzes dieser Arbeit mit $s(y)$ statt $g(y)$ gelten, gilt Hilfssatz 5 mit $s(y)$ statt $g(y)$, wenn nur $\chi_\mu(\eta)$ durch $\sigma_\mu(\eta)$ ersetzt wird. Mit Rücksicht auf (119) mit $q \geqq R+1$ und $s(y)$ statt $g(y)$ folgt aus (47) mit $\varkappa = 0$, mit $s(y)$ statt $g(y)$, und $\sigma_\mu(\eta)$ statt $\chi_\mu(\eta)$

$$(127)\qquad \sigma_\mu(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{f''(y)}}\, O\sum_{p=0}^{2\mu} e^{r(a)}\, x^{-R-1} = O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}}.$$

Aus (13), (126), (86) und (127) folgt, daß für jedes y in jedem der Intervalle $a \leqq y < A$ und $B < y \leqq b$

$$\chi(\eta) = O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}} \quad \text{und} \quad \sigma(\eta) = O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}}$$

ist, so daß jede der vier Summen

$$\sum_{\alpha\leqq\nu<f'(A)} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i\varphi(\nu)}, \qquad \sum_{\alpha\leqq\nu<f'(A)} \sigma(\nu)\, e^{-2\pi i\varphi(\nu)}, \qquad \sum_{f'(B)<\nu\leqq\beta} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i\varphi(\nu)}$$

und

$$\sum_{f'(B)<\nu\leqq\beta} \sigma(\nu)\, e^{-2\pi i\varphi(\nu)}$$

gleich

$$O\left((\beta-\alpha+1)\frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}}\right) = O\, e^{r(a)}\, x^{-R}\left(\sqrt[4]{f''(a)} + \frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right)$$

wegen (102) ist.

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (123), (124) und (125) die approximative Funktionalgleichung (65), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Bequemlichkeitshalber führe ich eine neue Voraussetzung ein.

Definition von Voraussetzung L. *Ich werde sagen, daß eine Funktion $l(y)$ Voraussetzung L erfüllt, wenn sie im Intervall $a \leqq y \leqq b$ unendlich oft differentiierbar*[13]) *ist, für jedes feste ganze $k \geqq 0$ die Beziehung*

$$l^{(k)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-k} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \tag{128}$$

gleichmäßig in y erfüllt, und für jedes ganze $k \geqq 0$

$$l^{(k)}(a) = 0, \quad l^{(k)}(b) = 0 \tag{129}$$

ist.

Hängt $l(y)$ nicht nur von y, sondern auch noch von einem Parameter z ab, und gilt (128) gleichmäßig in z, dann werde ich sagen, daß $l(y)$ Voraussetzung L gleichmäßig in z erfüllt.

Ich habe in Hilfssatz 8 bewiesen, daß wir beim Beweis von Behauptung 3 ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, daß (64) gilt. Aus dem vorigen Hilfssatz ergibt sich, daß wir beim Beweis der dritten Behauptung auch noch annehmen dürfen, daß $g(y)$ Voraussetzung L erfüllt; denn aus (4) und (100) folgt (128) mit $l(y) = g(y)$. Wir werden somit weiter in Teil III stets voraussetzen, daß $g(y)$ Voraussetzung L erfüllt.

Es ist unmittelbar klar, daß die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes gültig bleiben, wenn $g(y)$ ersetzt wird durch eine beliebige Funktion $l(y)$, die Voraussetzung L erfüllt; denn (4) mit $l(y)$ statt $g(y)$ folgt aus (128) und (100); die Relationen (5) und (6) mit $l(y)$ statt $g(y)$ folgen aus (129).

Hilfssatz 11. *Liegt z im Intervall $a \leqq z \leqq b$, erfüllt die Funktion $l_1(y)$, die auch von z abhängen darf, Voraussetzung L gleichmäßig in z, und wird*

$$l_2(y) = l_1(y)\, e^{\pm 2\pi i (f(y) - y f'(z) - \frac{1}{2}(y-z)^2 f''(z))} \tag{130}$$

gesetzt (so daß $l_2(y)$ auch von z abhängen kann), dann genügt auch $l_2(y)$ der Voraussetzung L gleichmäßig in z.

Beweis. Liegen y und w im Intervall $a \leqq y \leqq b$, so ist nach (2) und (100)

$$f'''(w) = O\frac{(f''(w))^{\frac{3}{2}}}{x^3} = O\frac{(f''(a))^{\frac{3}{2}}}{x^3}$$

gleichmäßig in w, so daß für jedes Zahlenpaar y und z in diesem Intervall

$$f''(y) - f''(z) = \int_z^y f'''(w)\, dw = O(b-a)\cdot\frac{(f''(a))^{\frac{3}{2}}}{x^3} = O\frac{f''(a)}{x^2} \tag{131}$$

[13]) Siehe Fußnote [1]).

wegen (101) und

$$(132)\quad \left\{\begin{aligned} &f'(y)-f'(z)-(y-z)f''(z)\\ &=\int_z^y (y-w)f'''(w)\,dw = O(b-a)^2\,\frac{(f''(a))^{\frac{3}{2}}}{x^3} = O\,\frac{\sqrt{f''(a)}}{x}\end{aligned}\right.$$

wegen (101) ist.

Wird für jedes ganze $k \geqq 0$

$$(133)\quad \frac{d^k}{dy^k}\, e^{\pm 2\pi i(f(y)-yf'(z)-\frac{1}{2}(y-z)^2 f''(z))} = E^{(k)}$$

gesetzt, so ist

$$(134)\quad |E^{(0)}| = 1,$$

$$E' = \pm 2\pi i\, E^{(0)}\{f'(y)-f'(z)-(y-z)f''(z)\},$$

also für jedes ganze $k \geqq 0$

$$(135)\quad E^{(k+1)} = \pm 2\pi i \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} E^{(k-h)} \cdot \frac{d^h(f'(y)-f'(z)-(y-z)f''(z))}{dy^h}.$$

Mittels dieser Beziehung werden wir beweisen

$$(136)\quad E^{(k)} = O\left(x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k}\right)$$

für jedes ganze $k \geqq 0$, und zwar gleichmäßig in y und z. Im Spezialfall $k=0$ ist diese Relation klar wegen (134), so daß es genügt (136) mit $k+1$ statt k zu beweisen, unter der Voraussetzung, daß sie für jede Zahl $\leqq k$ statt k schon bewiesen ist. Unter dieser Annahme wissen wir, daß das Glied in (135) mit $h=0$ den Wert

$$\begin{aligned} &O\left(x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k}\,|f'(y)-f'(z)-(y-z)f''(z)|\right)\\ &= O\left(x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k}\cdot\frac{\sqrt{f''(a)}}{x}\right) \qquad \text{wegen (132)}\\ &= O\left(x^{-(k+1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k+1)}\right)\end{aligned}$$

gleichmäßig in y und z hat.

Das Glied in (135) mit $h=1$ (das nur vorkommt, wenn $k \geqq 1$ ist) ist dann

$$\begin{aligned} &O\,x^{-(k-1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k-1)}\cdot|f''(y)-f''(z)|\\ &O\,x^{-(k-1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k-1)}\cdot\frac{f''(a)}{x^2} \qquad \text{wegen (131)}\\ &= O\,x^{-(k+1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k+1)},\end{aligned}$$

gleichmäßig in y und z, und die übrigen Glieder in (135), die nur auftreten, wenn $k \geqq 2$ ist, sind

$$= O\,x^{-(k-h)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k-h)} \cdot |f^{(h+1)}(y)|$$

$$= O\,x^{-(k-h)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k-h)} \frac{(f''(a))^{\frac{1}{2}(h+1)}}{x^{h+1}}$$

(wegen (2) und (100))

$$= O\,x^{-(k+1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(k+1)},$$

womit (136) mit $k+1$ statt k, also allgemein bewiesen ist.

Wegen (130) und (133) ist für jedes ganze $k \geqq 0$

$$l_2^{(k)}(y) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} l_1^{(h)}(y) \cdot E^{(k-h)} \tag{137}$$

$$= O \sum_{h=0}^{k} e^{r(a)}(f''(a))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}} x^{-h} \cdot (f''(a))^{\frac{1}{2}(k-h)} x^{-(k-h}$$

(wegen (128) mit $l(y) = l_1(y)$ und (136))

$$= O\,e^{r(a)}\,x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}$$

gleichmäßig in y und z, so daß (128) mit $l(y) = l_2(y)$ gleichmäßig in y und z gilt.

Wegen (129) mit $l(y) = l_1(y)$ und (137) ist

$$l_2^{(k)}(a) = 0, \quad l_2^{(k)}(b) = 0 \qquad (k \geqq 0),$$

so daß (129) mit $l(y) = l_2(y)$ gilt, womit alles bewiesen ist.

Hilfssatz 12. *Liegt z im Intervall $a \leqq y \leqq b$, und erfüllt die Funktion $l_3(y)$, die auch von z abhängen darf, Voraussetzung L gleichmäßig in z, dann gibt es eine Funktion $l_4(y)$ (die auch von z abhängen wird), die der Voraussetzung L gleichmäßig in z genügt und im Intervall $\frac{a+z}{2} \leqq y \leqq \frac{b+z}{2}$ den von y unabhängigen Wert $l_3(z)$ besitzt,*

Beweis. Ist $z = a$ oder b, also $l_3(z) = 0$, dann besitzt die Funktion $l_4(y)$, die identisch verschwindet, die genannten Eigenschaften. Wir dürfen also $a < z < b$ voraussetzen.

Es bezeichne $H(u)$ eine Funktion, die Voraussetzung H erfüllt, und es werde gesetzt

$$A = \frac{a+z}{2}, \quad B = \frac{b+z}{2} \quad (\text{also } a < A < z < B < b),$$

$$l_4(y) = l_3(z) \qquad \text{im Intervall } A \leqq y \leqq B,$$

$$l_4(y) = l_3(z)\,H\left(\frac{y-B}{b-B}\right) \qquad \text{im Intervall } B < y \leqq b,$$

$$l_4(y) = l_3(z)\,H\left(\frac{A-y}{A-a}\right) \qquad \text{im Intervall } a \leqq y \leqq A.$$

Wir müssen zeigen, daß die Funktion $l_4(y)$ Voraussetzung L gleichmäßig in z erfüllt. Wegen $H(0) = 1$ (vgl. Formel (62)) ist sie in den

Punkten A und B, also im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ stetig. Sie ist beliebig oft differentiierbar[14]); denn die k-te Derivierte nach rechts im Punkte B ist wegen (62) für jedes $k \geqq 1$ gleich

$$\frac{l_3(z)}{(b-B)^k} H^{(k)}(0) = 0,$$

und das ist gerade auch der Wert der k-ten Derivierten nach links; die k-te Derivierte nach links im Punkte A ist wegen (62) für jedes $k \geqq 1$ gleich

$$(-1)^k \frac{l_3(z)}{(A-a)^k} H^{(k)}(0) = 0,$$

und die k-te Derivierte nach rechts in diesem Punkte verschwindet gleichfalls.

Im Intervall $A \leqq y \leqq B$ ist wegen (128) mit $k = 0$, mit $l(y) = l_3(y)$ und mit z statt y

$$l_4(y) = l_3(z) = O\, e^{\tau(a)} \sqrt[4]{f''(a)},$$

und es ist in diesem Intervall

$$l_4^{(k)}(y) = 0 \qquad (k \geqq 1),$$

so daß im Intervall $A \leqq y \leqq B$ für jedes ganze $k \geqq 0$ die Beziehung

$$l_4^{(k)}(y) = O\left(e^{\tau(a)} x^{-k} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}\right) \tag{138}$$

gleichmäßig in y gilt.

Um zu zeigen, daß diese Relation auch in den Intervallen $a \leqq y \leqq A$ und $B \leqq y \leqq b$ gilt, setze ich $a = t$, $A = T$, oder $b = t$, $B = T$. Alsdann gilt im Intervall $t \leqq y \leqq T$ bzw. $T \leqq y \leqq t$ die Ungleichung $|y - t| \leqq |t - T|$, so daß nach (105) mit $h = 0$, $p = k$ und mit z statt y

$$\begin{aligned} l_4^{(k)}(y) &= l_3(z) \cdot \frac{1}{(t-T)^k} H^{(k)}\left(\frac{y-T}{t-T}\right) \\ &= O\, e^{\tau(a)} x^{-k} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{139}$$

gleichmäßig in y ist, so daß (138) im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ bewiesen ist.

Schließlich ist wegen (139) und (62) $l_4^{(k)}(t) = 0$, d. h.

$$l_4^{(k)}(a) = 0, \qquad l_4^{(k)}(b) = 0 \qquad (k \geqq 0),$$

so daß auch (129) mit $l(y) = l_4(y)$ gilt.

Hiermit ist Hilfssatz 12 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 13. *Ist p fest, ganz $\geqq 0$, R fest, und bezeichnen $l_3(y)$ und $l_4(y)$ die im vorigen Hilfssatz genannten Funktionen, so gelten die folgenden Eigenschaften:*

[14]) Siehe Fußnote [1]).

1. *Für jedes ganze feste* $k \geqq 1$ *sind die zwei Integrale*

$$\int_{\frac{1}{2}(z+b)}^{b} l_4^{(k)}(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2} \frac{dy}{(y-z)^p} \tag{140}$$

und

$$\int_{a}^{\frac{1}{2}(a+z)} l_4^{(k)}(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2} \frac{dy}{(z-y)^p} \tag{141}$$

gleich

$$O\, e^{r(a)}\, x^{-R-k-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}$$

gleichmäßig in z.

2. *Ist* $k = 0$, *so ist das durch* (140) *definierte Integral*

$$(f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\, l_3(z) \int_{\frac{1}{2}(b-z)\sqrt{f''(z)}}^{\infty} e^{\pi i u^2} \frac{du}{u^p} + O\, e^{r(a)}\, x^{-R-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}, \tag{142}$$

und das durch (141) *definierte Integral*

$$(f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}\, l_3(z) \int_{\frac{1}{2}(z-a)\sqrt{f''(z)}}^{\infty} e^{\pi i u^2} \frac{du}{u^p} + O\, e^{r(a)}\, x^{-R-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}. \tag{143}$$

Ist $z = b$ *bzw.* a, *dann wird mit dem ersten Glied in* (142) *bzw.* (143) *Null gemeint.*

Beweis. Es werde bei der Untersuchung des ersten Integrals $b = t$, $\frac{1}{2}(z+b) = T$, bei der Untersuchung des zweiten Integrals $a = t$, $\frac{1}{2}(a+z) = T$ gesetzt. Dann ist in beiden Integralen $|y-z| \geqq |t-y|$, also nach (105) mit $h = k$ und mit $l_4(y)$ statt $g(y)$

$$l_4^{(k)}(y) = O e^{r(a)}\, x^{-k-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} |y-z|^p. \tag{144}$$

Beide Integrale haben somit wegen (101) den Wert

$$O\, \frac{x}{\sqrt{f''(a)}} \cdot e^{r(a)}\, x^{-k-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}} = O\, e^{r(a)}\, x^{1-k-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}},$$

so daß die erste Behauptung von Hilfssatz 13 mit $R = -1$ richtig ist.

Nach (105) mit $l_3(y)$ statt $g(y)$, mit z statt y, mit $p+1$ statt p und mit $h = 0$ ist wegen $|y-z| \leqq |t-z|$

$$l_3(z) = O e^{r(a)}\, x^{-p-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}p+\frac{3}{4}} |t-z|^{p+1}, \tag{145}$$

und für jedes $\sigma > 0$ ist nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$\int_{\sigma}^{\infty} e^{\pi i u^2} \frac{du}{u^p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{d e^{\pi i u^2}}{u^{p+1}} = O\left(\frac{1}{\sigma^{p+1}}\right). \tag{146}$$

Ist $z = t$, so ist das erste Glied in (142) bzw. (143) Null, und sonst hat dies Glied wegen (100), (145) und (146) mit $\sigma = |T - z| \sqrt{f''(z}$ $= \frac{1}{2} |t - z| \sqrt{f''(z)}$ einen Wert

$$= O\,(f''(a))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} \cdot e^{r(a)}\, x^{-p-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}p+\frac{3}{4}} |t-z|^{p+1} \cdot \frac{1}{|t-z|^{p+1} (f''(a))^{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}}}$$

$$= O\, e^{r(a)}\, x^{-1-p} (f''(a))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}},$$

so daß auch die zweite Behauptung von Hilfssatz 13 mit $R = -1$ richtig ist.

Hilfssatz 13 ist also mit $R = -1$ statt R schon bewiesen. Um diesen Hilfssatz allgemein zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß die Behauptungen dieses Hilfssatzes, wenn sie für ein gewisses R bewiesen sind, auch mit $R + 2$ statt R gelten.

Es sei also Hilfssatz 13 mit einem gewissen R bewiesen. Da $l_4(y)$ Voraussetzung L erfüllt, ist wegen (129) mit $l(y) = l_4(y)$

$$l_4^{(k)}(t) = 0 \qquad (k \geqq 0); \tag{147}$$

da $l_4(y)$ unendlich oft differentiierbar[15]) ist und im Intervall $\frac{1}{2}(a + z) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(z + b)$ den von y unabhängigen Wert $l_3(z)$ besitzt, so ist

$$l_4(T) = l_3(z); \qquad l_4^{(k)}(T) = 0 \qquad (k \geqq 1). \tag{148}$$

Ist $z = t$, dann ist $l_3(z) = 0$, so daß dann die letztere der Beziehungen (148) auch für $k = 0$ gilt. Wir werden zwei Fälle unterscheiden.

1. Es sei $k \geqq 1$, oder es sei $k = 0$, $z = t$. In diesem Falle gilt die zweite der Relationen (148) für jedes ganze $k \geqq 0$. Mit Rücksicht hierauf und auf (147) ergibt sich mittels partieller Integration, daß jedes der durch (140) und (141) definierten Integrale dann gebracht werden kann in die Gestalt

$$\begin{cases} \dfrac{(\pm 1)^{p+1}}{2\pi i f''(z)} \displaystyle\int_T^t \frac{l_4^{(k)}(y)}{(y-z)^{p+1}}\, d\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2} \\ = -\dfrac{(\pm 1)^{p+1}}{2\pi i f''(z)} \displaystyle\int_T^t e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2} \left\{ \frac{l_4^{(k+1)}(y)}{(y-z)^{p+1}} - (p+1) \frac{l_4^{(k)}(y)}{(y-z)^{p+2}} \right\} dy, \end{cases} \tag{149}$$

wobei das Pluszeichen beim Integral (140), das Minuszeichen beim Integral (141) benutzt wird. Wird auf die rechte Seite von (149) die erste Behauptung von Hilfssatz 13 mit $k + 1$ und $p + 1$ statt k und p, und auch mit k und $p + 2$ statt k und p angewendet, und mit dem

[15]) Siehe Fußnote [1]).

R, für das Hilfssatz 13 richtig vorausgesetzt ist, so finden wir wegen (100) für jedes der durch (140) und (141) angegebenen Integrale den Wert

$$O\frac{1}{f''(a)}\cdot e^{r(a)}x^{-R-k-p-2}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p+1-\frac{1}{4}}$$
$$= O e^{r(a)}x^{-(R+2)-k-p}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}},$$

so daß die erste Behauptung von Hilfssatz 13 (und gleichfalls die zweite Behauptung mit $z=t$) mit $R+2$ statt R, also allgemein bewiesen ist.

2. Es sei $k=0$, $z \neq t$, d. h. wir betrachten jetzt die zweite Behauptung mit $z \neq t$. Mit Rücksicht auf (147) mit $k=0$ und (148) ergibt sich jetzt mittels partieller Summation, daß das durch (140) bzw. (141) definierte Integral mit $k=0$ in die folgende Gestalt gebracht werden kann, wobei das Plus-Zeichen beim ersten, das Minus-Zeichen beim zweiten Integral benutzt wird:

$$\frac{(\pm 1)^{p+1}}{2\pi i f''(z)}\int_T^t \frac{l_4(y)}{(y-z)^{p+1}}\,d\,e^{\pi i f''(z)(y-z)^2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &= -\frac{(\pm 1)^{p+1}}{2\pi i f''(z)}\cdot\frac{l_3(z)}{(T-z)^{p+1}}\,e^{\pi i f''(z)(T-z)^2} \\ &\quad + \frac{(\pm 1)^{p+1}(p+1)}{2\pi i f''(z)}\int_T^t \frac{l_4(y)}{(y-z)^{p+2}}\,e^{\pi i f''(z)(y-z)^2}\,dy \\ &\quad - \frac{(\pm 1)^{p+1}}{2\pi i f''(z)}\int_T^t \frac{l_4'(y)}{(y-z)^{p+1}}\,e^{\pi i f''(z)(y-z)^2}\,dy. \end{aligned}\right. \tag{150}$$

Für jedes $\sigma > 0$ und jedes $p \geqq 0$ ist

$$\int_\sigma^\infty e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^p} - \frac{p+1}{2\pi i}\int_\sigma^\infty e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^{p+2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma^\infty d\,\frac{e^{\pi i u^2}}{u^{p+1}} = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{e^{\pi i\sigma^2}}{\sigma^{p+1}}. \tag{151}$$

Setzen wir $\sigma = |T-z|\sqrt{f''(z)}$, also $\sigma > 0$ wegen $z \neq t$, dann ist das erste Glied in (150) wegen (151)

$$\left\{\begin{aligned} &\quad - \frac{(f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}}{2\pi i}\cdot\frac{l_3(z)}{\sigma^{p+1}}\,e^{\pi i\sigma^2} \\ &= (f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}l_3(z)\int_{|T-z|\sqrt{f''(z)}}^\infty e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^p} \\ &\quad - \frac{p+1}{2\pi i}(f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}l_3(z)\int_{|T-z|\sqrt{f''(z)}}^\infty e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^{p+2}}. \end{aligned}\right. \tag{152}$$

Um das zweite Glied in (150) zu behandeln, wende ich die zweite Behauptung von Hilfssatz 13 an, und zwar mit $p+2$ statt p und mit demjenigen R, für das diese Behauptung richtig vorausgesetzt ist. Ist $t=b$, also $T=\frac{1}{2}(z+b)$, dann ist

$$b-z=t-(2T-t)=2(t-T)=2|t-T|; \tag{153}$$

ist $t=a$, also $T=\frac{1}{2}(a+z)$, dann ist

$$z-a=(2T-t)-t=2(T-t)=2|t-T|. \tag{154}$$

Hieraus folgt, daß das zweite Glied in (150) den Wert

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{p+1}{2\pi i f''(z)}\Big\{(f''(z))^{\frac{1}{2}(p+2)-\frac{1}{2}}l_3(z)\int_{|t-T|\sqrt{f''(z)}}^{\infty}e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^{p+2}}\\&\qquad+Oe^{r(a)}x^{-R-(p+2)}(f''(a))^{\frac{1}{2}(p+2)-\frac{1}{4}}\Big\}\end{aligned}\right. \tag{155}$$

hat.

Das Schlußglied in (150) ist wegen der schon bewiesenen ersten Behauptung von Hilfssatz 13 mit $k=1$ und $p+1$ statt p

$$=O\frac{1}{f''(a)}\cdot e^{r(a)}x^{-R-1-(p+1)}(f''(a))^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p+1)-\frac{1}{4}}. \tag{156}$$

Ersetzt man das erste, zweite und dritte Glied von (150) bzw. durch die Ausdrücke (152), (155) und (156), dann erhält man für die durch (140) und (141) mit $k=0$ definierten Integrale wegen $|T-z|=|t-T|$ den Wert

$$(f''(z))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}}l_3(z)\int_{|T-z|\sqrt{f''(z)}}^{\infty}e^{\pi i u^2}\frac{du}{u^p}+Oe^{r(a)}x^{-(R+2)-p}(f''(a))^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{4}}.$$

Die Beziehungen (153) und (154) zeigen, daß so gerade die Ausdrücke (142) und (143) mit $R+2$ statt R gefunden werden, womit die zweite Behauptung ($z\neq t$ vorausgesetzt) mit $R+2$ statt R, also allgemein bewiesen ist.

Hilfssatz 14. *Ist $a\leqq z\leqq b$ und bezeichnen $l_3(y)$ und $l_4(y)$ die in Hilfssatz 12 genannten Funktionen, so ist für jedes feste R*

$$\int_a^b l_4(y)e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}dy=\frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}}e^{\frac{\pi i}{4}}+O\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}. \tag{157}$$

Beweis. Es ist

$$\int_a^b=\int_a^{\frac{1}{2}(a+z)}+\int_{\frac{1}{2}(a+z)}^{\frac{1}{2}(z+b)}+\int_{\frac{1}{2}(z+b)}^b. \tag{158}$$

Da $l_4(y)$ im Intervall $\frac{1}{2}(a+z) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(z+b)$ den von y unabhängigen Wert $l_3(z)$ besitzt, ist

$$(159)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{2}(a+z)}^{\frac{1}{2}(z+b)} l_4(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy = l_3(z) \int_{\frac{1}{2}(a+z)}^{\frac{1}{2}(z+b)} e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy \\ &= \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}} \int_{\frac{1}{2}(a-z)\sqrt{f''(z)}}^{\frac{1}{2}(b-z)\sqrt{f''(z)}} e^{\pi i u^2}\, du \\ &= \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}(z-a)\sqrt{f''(z)}} e^{\pi i u^2}\, du + \int_0^{\frac{1}{2}(b-z)\sqrt{f''(z)}} e^{\pi i u^2}\, du \right\}. \end{aligned}\right.$$

Ist $z = a$ oder b, so verschwindet $l_3(z)$ wegen (129), so daß dann aus (158), (142) mit $p = 0$ oder (143) mit $p = 0$ und (159) folgt

$$\int_a^b l_4(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy = O\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}} = \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} + O\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}},$$

so daß (157) dann gilt. Ist z weder a noch b, dann folgt aus (158), (142) mit $p = 0$ oder (143) mit $p = 0$ und (159)

$$\int_a^b l_4(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy$$

$$= \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}} \left\{ \int_{\frac{1}{2}(z-a)\sqrt{f''(z)}}^{\infty} e^{\pi i u^2}\, du + \int_0^{\frac{1}{2}(z-a)\sqrt{f''(z)}} + \int_0^{\frac{1}{2}(b-z)\sqrt{f''(z)}} + \int_{\frac{1}{2}(b-z)\sqrt{f''(z)}}^{\infty} \right\}$$

$$+ O\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}}$$

$$= \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{\pi i u^2}\, du + O\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}} = \frac{l_3(z)}{\sqrt{f''(z)}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} + O\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}},$$

womit Hilfssatz 14 bewiesen ist.

Hilfssatz 15. *Ist $a \leqq z \leqq b$, bezeichnen $l_3(y)$ und $l_4(y)$ die in Hilfssatz 12 genannten Funktionen, und wird*

$$(160)\quad l_5(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot \frac{l_3(y) - l_4(y)}{y - z} \qquad \text{falls } y \neq z \text{ ist,}$$

$$(161)\quad = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot l_3'(z) \qquad \text{falls } y = z \text{ ist,}$$

gesetzt, so erfüllt $l_5(y)$ *Voraussetzung* L *gleichmäßig in* z, *und ist für jedes ganze* $k \geqq 0$

$$l_5^{(k)}(z) = \frac{x}{(k+1)\sqrt{f''(z)}}\, l_3^{(k+1)}(z). \tag{162}$$

Beweis. Für jedes $y \neq z$ im Intervall $\frac{1}{2}(a+z) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(z+b)$ ist wegen (160)

$$l_5(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot \frac{l_3(y) - l_3(z)}{y-z},$$

da in diesem Intervall $l_4(y)$ den von y unabhängigen Wert $l_3(z)$ besitzt. Für jedes $y \neq z$ in diesem Intervall ist somit

$$l_5(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot \frac{1}{y-z} \int_z^y l_3'(w)\, dw. \tag{163}$$

Mittels dieser Beziehung kann man zeigen, daß für jedes $y \neq z$ im genannten Intervall und für jedes ganze $k \geqq 0$

$$l_5^{(k)}(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot \frac{1}{(y-z)^{k+1}} \int_z^y (w-z)^k\, l_3^{(k+1)}(w)\, dw \tag{164}$$

ist; denn wegen (163) gilt (164) mit $k = 0$, und gilt Beziehung (164) für ein bestimmtes $k \geqq 0$, so findet man durch Differentiation nach y

$$\begin{aligned} l_5^{(k+1)}(y) &= \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \left\{ \frac{-(k+1)}{(y-z)^{k+2}} \int_z^y (w-z)^k\, l_3^{(k+1)}(w)\, dw \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{(y-z)^{k+1}} (y-z)^k\, l_3^{(k+1)}(y) \right\} \\ &= \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot \frac{1}{(y-z)^{k+2}} \int_z^y (w-z)^{k+1}\, l_3^{(k+2)}(w)\, dw, \end{aligned}$$

so daß dann (164) mit $k+1$ statt k, also allgemein gilt.

Aus (163) und (161) ergibt sich, daß $l_5(y)$ im Punkte $y = z$ stetig ist. Jetzt werden wir zeigen, daß $l_5(y)$ in diesem Punkte k-mal (k beliebig, ganz $\geqq 1$) differentiierbar ist, und daß (162) gilt. Ist $k \geqq 2$, so dürfen wir annehmen, daß diese Eigenschaft mit $k-1$ statt k schon bewiesen ist; ist $k = 1$, so benutzen wir (161), d. h. (162) mit $k = 0$. Für jedes $y \neq z$ im Intervall $\frac{1}{2}(a+z) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(z+b)$ erhalten wir dann wegen (164) und (162) mit $k-1$ statt k

$$\frac{l_5^{(k-1)}(y)-l_5^{(k-1)}(z)}{y-z}=\frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\left\{\frac{1}{(y-z)^{k+1}}\int_z^y(w-z)^{k-1}l_3^{(k)}(w)\,dw-\frac{l_3^{(k)}(z)}{k(y-z)}\right\}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\cdot\frac{1}{(y-z)^{k+1}}\int_z^y(w-z)^{k-1}\left(l_3^{(k)}(w)-l_3^{(k)}(z)\right)dw$$

$$=\frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\cdot\frac{l_3^{(k+1)}(z)}{k+1}+\frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\cdot\frac{1}{(y-z)^{k+1}}\int_z^y(w-z)^k\left\{\frac{l_3^{(k)}(w)-l_3^{(k)}(z)}{w-z}-l_3^{(k+1)}(z)\right\}dw$$

$$\to\frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\cdot\frac{l_3^{(k+1)}(z)}{k+1}\quad\text{falls}\quad y\to z,$$

wegen

$$\frac{l_3^{(k)}(w)-l_3^{(k)}(z)}{w-z}-l_3^{(k+1)}(z)\to 0.$$

Hiermit ist gezeigt, daß $l_5(y)$ im Intervall $\frac{1}{2}(a+z)\leqq y\leqq\frac{1}{2}(z+b)$ beliebig oft differentiierbar ist und daß (162) gilt. Daß $l_5(y)$ in jedem Punkte $y\neq z$ beliebig oft differentiierbar ist, ergibt sich unmittelbar aus (160), so daß hiermit gezeigt ist, daß $l_5(y)$ im ganzen Intervall $a\leqq y\leqq b$ unendlich oft differentiierbar[16]) ist.

Jetzt werden wir zeigen, daß für jedes ganze $k\geqq 0$ im Intervall $a\leqq y\leqq b$

$$l_5^{(k)}(y)=O\,e^{r(a)}x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \tag{165}$$

gleichmäßig in y und z ist. Wir werden dabei verschiedene Fälle unterscheiden.

1. Es sei $y=z$. Dann ist wegen (162)

$$l_5^{(k)}(y)=l_5^{(k)}(z)=\frac{x}{(k+1)\sqrt{f''(z)}}l_3^{(k+1)}(z)$$
$$=O\,e^{r(a)}x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}$$

wegen (100) und (128) mit z statt y, $k+1$ statt k und mit $l(y)=l_3(y)$.

2. Es liege $y\neq z$ im Intervall $\frac{1}{2}(a+z)\leqq y\leqq\frac{1}{2}(z+b)$. Dann ist wegen (128) mit $k+1$ statt k und mit $l(y)=l_3(y)$ für jedes w im Intervall $a\leqq w\leqq b$

$$l_3^{(k+1)}(w)=O\,e^{r(a)}x^{-k-1}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}},$$

also nach (164) und (100)

$$l_5^{(k)}(y)=O\frac{x}{\sqrt{f''(a)}}\cdot\frac{1}{|y-z|^{k+1}}\cdot e^{r(a)}x^{-k-1}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}}\left|\int_z^y(w-z)^k\,dw\right|$$
$$=O\,e^{r(a)}x^{-k}(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}.$$

[16]) Siehe Fußnote [1]).

3. Es liege y in einem der zwei Intervalle $a \leqq y \leqq \frac{1}{2}(a+z)$ und $\frac{1}{2}(z+b) \leqq y \leqq b$. Liegt y im ersten Intervall, so setze ich $a = t$, $\frac{1}{2}(a+z) = T$; liegt y im zweiten Intervall, so setze ich $b = t$, $\frac{1}{2}(z+b) = T$. Dann ist in beiden Fällen

$$|y-z| \geqq |t-y|. \tag{166}$$

Es werde jetzt (105) zweimal angewendet, erst mit $g(y) = l_3(y)$, dann mit $g(y) = l_4(y)$, beidesmal mit $p = k-h+1$, wo h eine ganze Zahl $\geqq 0$ und $\leqq k$ bezeichnet. Wir finden dann wegen (166)

$$l_3^{(h)}(y) - l_4^{(h)}(y) = O\, e^{r(a)} x^{-k-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}} |y-z|^{k-h+1},$$

so daß aus

$$l_5(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \cdot (y-z)^{-1} (l_3(y) - l_4(y))$$

die Beziehung

$$\left\{\begin{aligned} l_5^{(k)}(y) &= \frac{x}{\sqrt{f''(z)}} \sum_{h=0}^{k} (-1)^{k-h} \frac{k!}{h!} (y-z)^{-k+h-1} \cdot (l_3^{(h)}(y) - l_4^{(h)}(y)) \\ &= O \frac{x}{\sqrt{f''(a)}} \sum_{h=0}^{k} |y-z|^{-k+h-1} \cdot e^{r(a)} x^{-k-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}} \cdot |y-z|^{k-h+1} \\ &= O\, e^{r(a)} x^{-k} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \end{aligned}\right. \tag{167}$$

folgt.

Hiermit ist gezeigt, daß (165) im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ gilt. Aus (167) und

$$l_3^{(h)}(a) = 0, \quad l_3^{(h)}(b) = 0, \quad l_4^{(h)}(a) = 0, \quad l_4^{(h)}(b) = 0 \qquad (h \geqq 0),$$

folgt außerdem noch für jedes ganze $k \geqq 0$

$$l_5^{(k)}(a) = 0, \quad l_5^{(k)}(b) = 0,$$

so daß $l_5(y)$ Voraussetzung L erfüllt.

Hilfssatz 16. *Ist $a \leqq z \leqq b$, bezeichnen $l_3(y)$ und $l_4(y)$ die Funktionen von Hilfssatz* 12 *und wird*

$$l_6(y) = \frac{x^2}{f''(z)} \cdot \frac{d}{dy} \frac{l_3(y) - l_4(y)}{y-z} \qquad \textit{falls } y \neq z \textit{ ist,} \tag{168}$$

$$= \frac{x^2}{2f''(z)} l_3''(z) \qquad \textit{falls } y = z \textit{ ist,} \tag{169}$$

gesetzt, so erfüllt $l_6(y)$ Voraussetzung L, und ist

$$l_6^{(k)}(z) = \frac{x^2}{(k+2) f''(z)} l_3^{(k+2)}(z) \qquad (k \geqq 0). \tag{170}$$

Beweis. Bezeichnet $l_5(y)$ die Funktion des vorigen Hilfssatzes, die Voraussetzung L erfüllt, dann ist

$$l_6(y) = \frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\, l_5'(y). \tag{171}$$

Diese Funktion ist im ganzen Intervall $a \leqq y \leqq b$ beliebig oft differentiierbar[17]); wegen (128) mit $l(y) = l_5(y)$ und mit $k+1$ statt k ist

$$\begin{aligned} l_6^{(k)}(y) &= \frac{x}{\sqrt{f''(z)}}\, l_5^{(k+1)}(y) \\ &= O\,\frac{x}{\sqrt{f''(a)}} \cdot e^{r(a)}\, x^{-k-1} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{3}{4}} \\ &= O\, e^{r(a)}\, x^{-k} (f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

und wegen

$$l_5^{(k+1)}(a) = l_5^{(k+1)}(b) = 0$$

ist

$$l_6^{(k)}(a) = 0, \quad l_6^{(k)}(b) = 0,$$

so daß $l_6(y)$ Voraussetzung L erfüllt.

Aus (171) und (162) mit $k+1$ statt k folgt (170).

Hilfssatz 17. *Ist $\alpha \leqq \zeta \leqq \beta$, so ist für jedes feste R*

$$\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i(f(y)-\zeta y)}\, dy = e^{-2\pi i \varphi(\zeta)}\, \chi(\zeta) + O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}}; \tag{172}$$

hierbei darf $g(y)$ auch von ζ abhängen, wenn $g(y)$ dann nur Voraussetzung L gleichmäßig in ζ erfüllt.

Beweis. Wegen (13) ist (172) identisch mit

$$\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i(f(y)-\zeta y)}\, dy = e^{-2\pi i \varphi(\zeta)} \sum_{\substack{0 \leqq \mu < \frac{1}{2}R \\ \mu \text{ ganz}}} \chi_\mu(\zeta) + O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}}. \tag{173}$$

Für jedes Zahlenpaar z und $z+s$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$ ist

$$\begin{aligned} & g(z+s)\, e^{2\pi i(f(z+s)-(z+s)f'(z)-\frac{1}{2}s^2 f''(z))} \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot g(z+s)\, e^{2\pi i(f(z+s)-f(z)-sf'(z)-\frac{1}{2}s^2 f''(z))} \cdot e^{2\pi i(f(z)-zf'(z)-\frac{1}{8})} \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}} \cdot g(z+s)\, e^{2\pi i(f(z+s)-f(z)-sf'(z)-\frac{1}{2}s^2 f''(z))} \cdot e^{-2\pi i \varphi(\zeta)} \end{aligned}$$

wegen (8), wo ζ die Zahl $f'(z)$ bezeichnet. Ersetzt man in (17) und (18) y durch z, z durch s, und setzt man

$$t_h(z)\, e^{-2\pi i \varphi(\zeta)} = u_h(z),$$

so findet man, daß (173) äquivalent ist mit der folgenden Behauptung:

---

[17]) Siehe Fußnote [1]).

Entwickelt man

$$g(z+s)\,e^{2\pi i\,(f(z+s)-(z+s)\,f'(z)-\frac{1}{2}s^2 f''(z))} \tag{174}$$

formell nach steigenden Potenzen von s

$$\sum_{h=0}^{\infty} u_h(z)\,s^h, \tag{175}$$

so ist für jedes feste R

$$\left\{\begin{aligned}&\int_a^b g(y)\,e^{2\pi i\,(f(y)-\zeta y)}\,dy\\&= e^{\frac{1}{4}\pi i}\sum_{\substack{0\leqq\mu<\frac{R}{2}\\ \mu\text{ ganz}}} i^{\mu}\,\pi^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\Gamma\Big(\mu+\frac{1}{2}\Big)\,(f''(z))^{-\mu-\frac{1}{2}}\,u_{2\mu}(z)+O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\end{aligned}\right. \tag{176}$$

Die linke Seite von (172) ist wegen (101) und wegen (4) mit $k=0$

$$O\,\frac{x}{\sqrt{f''(a)}}\cdot e^{r(a)}\sqrt[4]{f''(a)}=O\,\frac{x\,e^{r(a)}}{\sqrt[4]{f''(a)}},$$

und wegen (13) mit $\nu=0$ ist

$$\chi(\zeta)=O\,\frac{e^{r(a)}}{\sqrt[4]{f''(a)}},$$

so daß die Behauptung von Hilfssatz 17 mit $R=-1$ gilt.

Die Behauptung von Hilfssatz 17 sei mit einem bestimmten R bewiesen und mit $R+2$ statt R zu beweisen.

Nenne ich die in (174) definierte Funktion $l_3(z+s)$ (diese Funktion hängt natürlich nicht nur von $z+s$, sondern auch von z ab), dann ist die linke Seite von (172)

$$\int_a^b l_3(y)\,e^{\pi i\,(y-z)^2\cdot f''(z)}\,dy \tag{177}$$

und dann ist (175) die formelle Entwicklung von $l_3(z+s)$ nach steigenden Potenzen von s, d. h. dann ist

$$\frac{l_3^{(k)}(z)}{k!}=u_k(z) \qquad (k\geqq 0). \tag{178}$$

Da die Funktion $g(y)$ Voraussetzung L gleichmäßig in z erfüllt, erfüllt nach Hilfssatz 11 auch $l_3(y)$ diese Voraussetzung gleichmäßig in z. Bezeichnet $l_4(y)$ die in Hilfssatz 12 genannte Funktion, so ist das durch (172), d. h. durch (177) angegebene Integral gleich

$$\int_a^b l_4(y)\cdot e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\,dy+\int_a^b (l_3(y)-l_4(y))\,\frac{d\,e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}}{2\pi i\,(y-z)\,f''(z)}. \tag{179}$$

Wendet man auf das erste Glied in (179) Hilfssatz 14 mit $R+2$ statt R an, so findet man

$$(180)\qquad \int_a^b l_4(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy = \frac{l_3(z)}{\sqrt[4]{f''(z)}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} + O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+2}\sqrt[4]{f''(a)}}.$$

Da (129) mit $l(y)=l_4(y)$ und auch mit $l(y)=l_3(y)$ gilt, findet man mittels partieller Integration für das zweite Glied in (179)

$$-\frac{1}{2\pi i f''(z)}\int_a^b \left\{\frac{d}{dy}\,\frac{l_3(y)-l_4(y)}{y-z}\right\}\cdot e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy.$$

Wird die Funktion $l_6(y)$ des vorigen Hilfssatzes benutzt, so kann man diesen Ausdruck durch

$$-\frac{1}{2\pi i x^2}\int_a^b l_6(y)\, e^{\pi i f''(z)\cdot(y-z)^2}\, dy,$$

also durch

$$-\frac{1}{2\pi i x^2}\int_a^b l_7(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\zeta y)}\, dy$$

ersetzen, wenn man

$$(181)\qquad l_7(y) = l_6(y)\, e^{-2\pi i (f(y)-y f'(z)-\frac{1}{2}(y-z)^2 f''(z))}$$

setzt.

Mit Rücksicht auf (180) ist das Resultat nun, daß das in (172) definierte Integral den Wert

$$(182)\qquad \frac{l_3(z)}{\sqrt[4]{f''(z)}}\, e^{\frac{\pi i}{4}} - \frac{1}{2\pi i x^2}\int_a^b l_7(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\zeta y)}\, dy + O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+2}\sqrt[4]{f''(a)}}$$

hat.

Da $l_7(y)$ nach Hilfssatz 11 Voraussetzung L gleichmäßig in z, also alle der Funktion $g(y)$ aufgelegten Voraussetzungen erfüllt, darf Hilfssatz 17 mit $l_7(y)$ statt $g(y)$ angewendet werden, und zwar mit demjenigen R, für das der Hilfssatz schon bewiesen vorausgesetzt ist. Dazu brauche ich die formelle Entwicklung der Funktion

$$l_7(z+s)\, e^{2\pi i (f(z+s)-(z+s)f'(z)-\frac{1}{2}s^2 f''(z))} = l_6(z+s)$$

(vgl. (181)) nach steigenden Potenzen von s und diese formelle Entwicklung ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_6^{(k)}(z)}{k!}\, s^k = \frac{x^2}{f''(z)}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{l_3^{(k+2)}(z)}{(k+2)!}\, s^k$$

(wegen (170))

$$= \frac{x^2}{f''(z)}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\, u_{k+2}(z)\, s^k$$

wegen (178). Nach unserem zu beweisenden Hilfssatz, d. h. nach (176) mit $l_\tau(y)$ statt $g(y)$ und mit $\frac{x^2}{f''(z)}(k+1)u_{k+2}$ statt u_k ist dann das zweite Glied in (182) gleich

$$-\frac{1}{2\pi i x^2}\int_a^b l_\tau(y)\, e^{2\pi i(f(y)-\zeta y)}\, dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi i x^2}\left\{\frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}x^2}{f''(z)}\sum_{\substack{0\leqq\mu<\frac{R}{2}\\ \mu \text{ ganz}}} i^\mu \pi^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)(f''(z))^{-\mu-\frac{1}{2}}(2\mu+1)u_{2\mu+2}(z) + O\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\right\},$$

also, $\mu+1=\lambda$ gesetzt,

$$= e^{\frac{1}{4}\pi i}\sum_{\substack{1\leqq\lambda<\frac{R+2}{2}\\ \lambda \text{ ganz}}} i^\lambda \pi^{-\lambda-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(f''(z))^{-\lambda-\frac{1}{2}}u_{2\lambda}(z) + O\frac{e^{r(a)}}{x^{R+2}\sqrt[4]{f''(a)}}.$$

Mit Rücksicht auf (182) folgt hieraus (176) mit $R+2$ statt R, so daß diese Formel, also Hilfssatz 17, für jedes feste R gilt.

Hilfssatz 18. *Für jedes ganze $k\geqq 0$ ist*

$$(183)\quad \frac{d^k}{dy^k}\frac{1}{\sqrt{f''(y)}} = \sum_{(p)} K_s(p)\,(f''(y))^{p_2-\frac{1}{2}}(f'''(y))^{p_3}\ldots(f^{(k+2)}(y))^{p_{k+2}},$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_2, p_3, \ldots, p_{k+2}$ mit

$$(184)\quad 2p_2+3p_3+\ldots+(k+2)p_{k+2}=k;$$

$$(185)\quad p_2\leqq 0,\quad p_3\geqq 0,\ldots,p_{k+2}\geqq 0,$$

und wo $K_s(p)$ durch das System (p) eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Im Spezialfall $k=0$ ist (183) evident, und zwar mit $p_2=0$ ($p_3, p_4, \ldots$ kommen nicht vor) und $K_s(p)=1$.

Es sei $k\geqq 1$, und es sei (183) mit $k-1$ statt k bewiesen. Alsdann ist

$$(186)\quad \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}}\frac{1}{\sqrt{f''(y)}} = \sum_{(q)} K_s(q)\,(f''(y))^{q_2-\frac{1}{2}}(f'''(y))^{q_3}\ldots(f^{(k+1)}(y))^{q_{k+1}}$$

mit

$$(187)\quad 2q_2+3q_3+\ldots+(k+1)q_{k+1}=k-1;$$

$$(188)\quad q_2\leqq 0,\quad q_3\geqq 0,\ldots,q_{k+1}\geqq 0.$$

Aus (186) folgt (182) durch Differentiation nach y, und zwar mit

$$2p_2 + 3q_1 + \ldots + (k+2)\,p_{k+2} = 2q_2 + 3q_3 + \ldots + (k+1)\,q_{k+1} + 1,$$

so daß wegen (187) Beziehung (184) gilt. Außerdem ist noch

$$p_2 = q_2 \text{ oder } q_2 - 1;$$

$$p_h = q_h + 1 \text{ oder } q_h \text{ oder } q_h - 1 \quad (3 \leqq h \leqq k+1)$$

($p_h = q_h - 1$ kommt nur vor, wenn $q_h \geqq 1$ ist),

$$p_{k+2} = 0 \text{ of } 1.$$

Mit Rücksicht auf (188) folgt hieraus (185), womit Hilfssatz 18 bewiesen ist.

Hilfssatz 19. *Erfüllt $l(y)$ Voraussetzung L, so erfüllt auch*

$$l_8(y) = \frac{l'(y)}{\sqrt{f''(y)}}$$

diese Voraussetzung.

Beweis. Nach dem vorigen Hilfssatz und wegen (2) ist für jedes ganze $k \geqq 0$

$$(189)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^k}{dy^k}\frac{1}{\sqrt{f''(y)}} &= O\sum_{(p)} \frac{(f''(y))^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p_2+3p_3+\ldots+(k+2)p_{k+2})}}{x^{3p_3+4p_4+\ldots+(k+2)p_{k+2}}} \\ &= O\sum_{(p)} \frac{(f''(y))^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k}}{x^{-2p_2+k}} && \text{wegen (184)} \\ &= O\frac{(f''(y))^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k}}{x^k} && \text{wegen (185).} \end{aligned} \right.$$

Wir bekommen nun

$$(190)\quad l_8^{(k)}(y) = \sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h} l^{(h+1)}(y)\frac{d^{k-h}}{dy^{k-h}}\frac{1}{\sqrt{f''(y)}}$$

$$= O\sum_{h=0}^{k} e^{r(a)}\frac{(f''(a))^{\frac{1}{2}(h+1)+\frac{1}{4}}}{x^{h+1}}\cdot\frac{(f''(a))^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(k-h)}}{x^{k-h}}$$

(wegen (128) und (189) mit $k-h$ statt k)

$$= O\,e^{r(a)}\frac{(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^{k+1}} = O\,e^{r(a)}\frac{(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^k}.$$

Aus (129) mit $k+1$ statt k und (190) folgt außerdem noch

$$l_8^{(k)}(a) = 0, \qquad l_8^{(k)}(b) = 0 \quad (k \geqq 0),$$

so daß $l_8(y)$ Voraussetzung L erfüllt.

Hilfssatz 20. *Ist k ganz $\geqq 0$, ν entweder $> \beta$ oder $< \alpha$, dann ist*

$$(191)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy \\ &= \sum_{(p)} \int_a^b l_{(p)}(y) \cdot (f'(y)-\nu)^{p_1} (f''(y))^{p_2} \dots (f^{(k)}(y))^{p_k}\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy, \end{aligned}\right.$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ mit

$$(192)\qquad p_1 + 2p_2 + \dots + kp_k = 0;$$

$$(193)\qquad -2k \leqq p_1 \leqq -k; \quad p_2 \geqq 0, \quad p_3 \geqq 0, \dots, p_k \geqq 0,$$

und wo $l_{(p)}(y)$ eine geeignet gewählte Funktion bezeichnet, die Voraussetzung L erfüllt und bei gegebenen Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ durch das System (p) eindeutig bestimmt ist, also nicht von ν abhängt.

Beweis. Der Spezialfall $k = 0$ dieses Hilfssatzes ist evident, und zwar mit $p_1 = 0$ ($p_2, p_3, \dots$ kommen dann nicht vor), und $l_{(p)}(y) = g(y)$. Es sei $k \geqq 1$, und es sei der Hilfssatz mit $k-1$ statt k schon bewiesen. Alsdann ist

$$(194)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy \\ &= \sum_{(q)} \int_a^b l_{(q)}(y)\, (f'(y)-\nu)^{q_1} (f''(y))^{q_2} \dots (f^{(k-1)}(y))^{q_{k-1}}\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy \end{aligned}\right.$$

mit

$$(195)\qquad q_1 + 2q_2 + \dots + (k-1)\, q_{k-1} = 0;$$

$$(196)\qquad -2k+2 \leqq q_1 \leqq -k+1; \quad q_2 \geqq 0,\ q_3 \geqq 0, \dots, q_{k-1} \geqq 0,$$

und wo $l_{(q)}(y)$ Voraussetzung L erfüllt, also insbesondere die Eigenschaft

$$(197)\qquad l_{(q)}(a) = 0, \quad l_{(q)}(b) = 0, \quad l'_{(q)}(a) = 0, \quad l'_{(q)}(b) = 0$$

besitzt. Nennen wir bequemlichkeitshalber

$$(f'(y)-\nu)^{q_1-1} (f''(y))^{q_2} \dots (f^{(k-1)}(y))^{q_{k-1}} = F_{(q)}(y),$$

so findet man für das allgemeine Glied der rechten Seite von (194) mittels partieller Integration wegen (197)

$$(198)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b l_{(q)}(y)\, F_{(q)}(y)\, (f'(y)-\nu)\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b l_{(q)}(y)\, F_{(q)}(y)\, d\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_a^b e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, \frac{d\, l_{(q)}(y)\, F_{(q)}(y)}{dy}\, dy. \end{aligned}\right.$$

Nach dem vorigen Hilfssatz erfüllt auch $\frac{l'_{(q)}(y)}{\sqrt{f''(y)}}$ Voraussetzung L, so daß wir schreiben können

$$(199)\qquad \begin{cases} & -\frac{1}{2\pi i}\frac{d\,l_{(q)}(y)\,F_{(q)}(y)}{dy} \\ = & -\frac{1}{2\pi i} l_{(q)}(y)\,F'_{(q)}(y) - \frac{1}{2\pi i}\frac{l'_q(y)}{\sqrt{f''(y)}} F_{(q)}(y)\sqrt{f''(y)} \\ = & \sum_{(p)} l_{(p)}(y)\,(f'(y)-\nu)^{p_1}(f''(y))^{p_2}\dots(f^{(k)}(y))^{p_k}; \end{cases}$$

dabei sind nur die vier folgenden Fälle möglich, in denen ich bequemlichkeitshalber $q_k = 0$ einführe:

1. Es ist $p_1 = q_1 - 2;\ p_2 = q_2 + 1;\ p_h = q_h\,(3 \leqq h \leqq k)$.
2. Es ist $p_1 = q_1 - 1;\ p_2 = q_2 - 1;\ p_3 = q_3 + 1;\ p_h = q_h\,(4 \leqq h \leqq k)$
3. Es gibt eine ganze Zahl $j \geqq 3$ und $\leqq k-1$, so daß

$$p_1 = q_1 - 1; \quad p_j = q_j - 1; \quad p_{j+1} = q_{j+1} + 1;$$
$$p_h = q_h\ (2 \leqq h \leqq k;\ h \neq j,\ h \neq j+1)$$

ist.

4. Es ist $p_1 = q_1 - 1;\ p_2 = q_2 + \frac{1}{2};\ p_h = q_h\ \ (3 \leqq h \leqq k)$.

Aus (194), (198) und (199) folgt (191); aus (195) folgt (192) und aus (196) folgt (193).

Hilfssatz 21. *Es sei $\nu > \beta$ oder $\nu < \alpha$, und es werde $t = b$ oder $t = a$ gesetzt, je nachdem $\nu > \beta$ oder $\nu < \alpha$ ist. Dann ist für jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste ganze $q \geqq 0$*

$$(200)\qquad \int_a^b g(y)\,e^{2\pi i(f(y)-\nu y)}\,dy$$
$$= O\,e^{r(a)}x^{-q}\sum_{m=k}^{2k}(f''(a))^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}}\int_a^b \frac{|t-y|^q}{|\nu - f'(y)|^m}\,dy$$

gleichmäßig in ν.

Beweis. Es werde der vorige Hilfssatz angewendet. Nach Hilfssatz 9 mit $h = 0$ ist bei festem (p) für jedes ganze $q \geqq 0$

$$l_{(p)}(y) = O\,e^{r(a)}x^{-q}(f''(a))^{\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}}|t-y|^q,$$

so daß wegen (2) die linke Seite von (200) den Wert

$$O\sum_{(p)}\int_a^b e^{r(a)}x^{-q}(f''(a))^{\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}}|t-y|^q\,|f'(y)-\nu|^{p_1}(f''(a))^{\frac{1}{2}(2p_2+3p_3+\dots+kp_k)}$$

hat, wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen mit (192) und (193). Setzen wir $m = -p_1$, so läuft m wegen (193) durch $k, k+1, \ldots, 2k$, und es ist wegen (192)

$$2p_2 + 3p_3 + \ldots + kp_k = m,$$

so daß die linke Seite von (200)

$$O \sum_{m=k}^{2k} e^{r(a)} x^{-q} (f''(a))^{\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}} \int_a^b \frac{|t-y|^q}{|\nu - f'(y)|^m} dy$$

ist.

Hilfssatz 22. *Ist ν entweder $> \beta$ oder $< \alpha$, und wird $\beta = \tau$ oder $\alpha = \tau$ gesetzt, je nachdem $\nu > \beta$ oder $< \alpha$ ist, dann ist für jedes feste R*

$$(201) \qquad \int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y) - \nu y)}\, dy = O \frac{e^{r(a)}}{x^R \sqrt[4]{f''(a)}} \operatorname{Min}\left(1, \frac{f''(a)}{(\nu-\tau)^2}\right).$$

Beweis. Ist $\nu > \beta$, so ist für jedes y im Intervall $a \leqq y \leqq b$ wegen (100)

$$\nu - f'(y) \geqq f'(b) - f'(y) = \int_y^b f''(z)\, dz \geqq c_1 f''(a) \cdot (b-y)$$

(c_1 fest > 0), also

$$b - y = O \frac{\nu - f'(y)}{f''(a)}.$$

Ist $\nu < \alpha$, so ist für jedes y im Intervall $a \leqq y \leqq b$ wegen (100)

$$f'(y) - \nu \geqq f'(y) - f'(a) = \int_a^y f''(z)\, dz \geqq c_2 f''(a) \cdot (y-a)$$

(c_2 fest > 0), also

$$y - a = O \frac{f'(y) - \nu}{f''(a)},$$

somit in beiden Fällen

$$(202) \qquad |t-y| = O \frac{|f'(y) - \nu|}{f''(a)}.$$

Wegen $q \geqq 0$ und (202) gibt der vorige Hilfssatz

$$\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y) - \nu y)}\, dy = O\, e^{r(a)} x^{-q} \sum_{m=k}^{2k} (f''(a))^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}q + \frac{1}{4}} \int_a^b \frac{dy}{|f'(y) - \nu|^{m-q}};$$

hierin sind k und q beliebig fest ganz $\geqq 0$.

Ist $|f''(a)| < |\nu - \tau|^2$, so wähle ich $k \geqq q+2$; dann ist wegen $|f'(y) - \nu| \geqq |\nu - \tau|$

$$\frac{1}{|f'(y) - \nu|^{m-q}} \leqq \frac{1}{|\nu - \tau|^{m-q}}, \qquad (k \leqq m \leqq 2k)$$

also wegen (101)

$$\int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy = O\,\frac{e^{r(a)}\, x^{-(q-1)}}{\sqrt[4]{f''(a)}} \sum_{m=k}^{2k} \frac{|f''(a)|^{\frac{1}{2}(m-q)}}{|\nu-\tau|^{m-q}},$$

so daß (201) dann aus der letzten Beziehung mit $q-1 \geqq R$ folgt.

Ist $|f''(a)| \geqq |\nu-\tau|^2$, so wähle ich $q \geqq 2k$. Dann ist

$$|f'(y)-\nu| \leqq |\nu-\tau| + |f'(y)-\tau| \leqq |\nu-\tau| + |\beta-\alpha|$$
$$= O\sqrt{f''(a)} + O\left(x\sqrt{f''(a)}\right) = O\left(x\sqrt{f''(a)}\right)$$

wegen (102), also

$$|f'(y)-\nu|^{q-m} = O\left(x^{q-m}(f''(a))^{\frac{1}{2}(q-m)}\right) \qquad (k \leqq m \leqq 2k).$$

Aus (101) folgt dann

$$\int_a^b g(y) e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy$$

$$= O e^{r(a)} x^{-q} \sum_{m=k}^{2k} (f''(a))^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}q+\frac{1}{4}} \cdot \frac{x}{\sqrt{f''(a)}} \cdot x^{q-m} (f''(a))^{\frac{1}{2}(q-m)}$$

$$= O\,\frac{e^{r(a)}}{\sqrt[4]{f''(a)}} \sum_{m=k}^{2k} x^{-(m-1)} = O\,\frac{e^{r(a)}\, x^{-(k-1)}}{\sqrt[4]{f''(a)}},$$

so daß jetzt (201) aus dieser Beziehung mit $k-1 \geqq R$ folgt.

Hiermit ist Hilfssatz 22 vollständig bewiesen.

Nach diesen Hilfssätzen ist es nicht schwer mehr, Behauptung 3 zu beweisen. Wegen $g(a)=0$, $g(b)=0$ ist die Summe (1) gleich

$$\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}}{}' g(n)\, e^{2\pi i f(n)},$$

wo der Strich bezeichnet, daß das eventuelle Glied mit $n=a$ bzw. $n=b$ mit nur einem halben Anschlag in Rechnung gebracht wird. Nach der Dirichletschen Theorie der Fourierschen Reihen ist also

$$(203)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} = \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \sum_{\nu=-N}^{N} \int_a^b g(y)\, e^{2\pi i (f(y)-\nu y)}\, dy \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} + \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \left\{ \sum_{\beta < \nu \leqq N} + \sum_{-N \leqq \nu < \alpha} \right\}. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 17 mit $R+1$ statt R ist

$$(204)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} = \sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \chi(\nu) + O(\beta-\alpha+1) \cdot \frac{e^{r(a)}}{x^{R+1}\sqrt[4]{f''(a)}} \\ \qquad = \displaystyle\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \chi(\nu) + O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R}\left(\sqrt[4]{f''(a)} + \frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right) \end{cases}$$

wegen (102). Nach dem vorigen Hilfssatz ist

$$(205)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{\beta<\nu\leqq N}\int_a^b g(y)\,e^{2\pi i(f(y)-\nu y)}\,dy = O\sum_{\nu>\beta}\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\operatorname{Min}\left(1,\frac{f''(a)}{(\nu-\beta)^2}\right)\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{\sum_{\beta<\nu\leqq\beta+1+\sqrt{f''(a)}}1+\sum_{\nu>\beta+1+\sqrt{f''(a)}}\frac{f''(a)}{(\nu-\beta)^2}\right\}\\
&\quad O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{1+\sqrt{f''(a)}+\int_{\beta+\sqrt{f''(a)}}^{\infty}\frac{f''(a)}{(u-\beta)^2}\,du\right\}\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{1+\sqrt{f''(a)}+\sqrt{f''(a)}\right\}\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R}\left(\sqrt[4]{f''(a)}+\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right)
\end{aligned}\right.$$

gleichmäßig in N und

$$(206)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{-N\leqq\nu<\alpha}\int_a^b g(y)\,e^{2\pi i(f(y)-\nu y)}\,dy = O\sum_{\nu<\alpha}\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\operatorname{Min}\left(1,\frac{f''(a)}{(\alpha-\nu)^2}\right)\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{\sum_{\alpha-1-\sqrt{f''(a)}\leqq\nu<\alpha}1+\sum_{\nu<\alpha-1-\sqrt{f''(a)}}\frac{f''(a)}{(\alpha-\nu)^2}\right\}\\
&\quad O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{1+\sqrt{f''(a)}+\int_{-\infty}^{\alpha-\sqrt{f''(a)}}\frac{f''(a)}{(\alpha-u)^2}\,du\right\}\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R\sqrt[4]{f''(a)}}\left\{1+\sqrt{f''(a)}+\sqrt{f''(a)}\right\}\\
&\quad = O\,\frac{e^{r(a)}}{x^R}\left(\sqrt[4]{f''(a)}+\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}}\right)
\end{aligned}\right.$$

gleichmäßig in N.

Aus (203), (204), (205) und (206) folgt Behauptung 3.

IV. Beweis von Behauptung 8.

In diesem Teil werden die Beziehungen (5) und (6) nicht benutzt. In den obigen Betrachtungen habe ich schon gezeigt, daß die Voraussetzungen unseres Satzes gültig bleiben, wenn a und α, b und β, f und φ, g und χ, k und $\varkappa$, m und μ, n und ν, r und ϱ, y und η, z und ζ vertauscht werden, wenn dann nur außerdem i durch $-i$ ersetzt wird. Behauptung 2 geht durch diese Vertauschung und Ersetzung über in die folgende, also gleichfalls gültige Behauptung:

Wird $g_m(y)$ für jedes ganze $m \geqq 0$ im Intervall $a \leqq y \leqq b$ durch (15) definiert, so gibt es im Intervall $a \leqq y \leqq b$ eine Funktion $G(y)$ derart, daß für jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste n im Intervall $a \leqq y \leqq b$

$$G^{(k)}(y) = \sum_{\substack{0 \leqq m < n \\ m \text{ ganz}}} g_m^{(k)}(y) + O\, e^{r(y)}\, x^{-2n-k} (f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \tag{207}$$

gleichmäßig in y ist. Aber damit ist Behauptung 8 noch nicht bewiesen, da wir Formel (16) noch beweisen müssen. Wir sehen, daß diese Formel unmittelbar aus (207) folgt, wenn wir nur beweisen können, daß für jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste R

$$G^{(k)}(y) - g^{(k)}(y) = O\, e^{r(y)}\, x^{-R} (f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} \tag{208}$$

ist, und um diese Beziehung beweisen zu können, brauche ich noch verschiedene Hilfssätze.

Hilfssatz 23. *Für jedes ganze $m \geqq 0$ und jedes ganze $k \geqq 0$ ist*

$$g_m^{(k)}(y) = \sum_{(p)} K_9(p, m)\, \chi^{(p_1)}(\eta)\, (\varphi''(\eta))^{p_2 - \frac{1}{2}} (\varphi'''(\eta))^{p_3} (\varphi^{\mathrm{IV}}(\eta))^{p_4} \ldots, \tag{209}$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ mit

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = -k; \tag{210}$$

$$p_1 \geqq 0, \quad p_3 \geqq 0, \quad p_4 \geqq 0, \quad \ldots; \tag{211}$$

$$-m - 2k \leqq p_2 \leqq -m - k, \tag{212}$$

und wo $K_9(p, m)$ eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom System (p) und von der Zahl m abhängig ist.

Vorbemerkung. Wegen (210) und (212) ist

$$p_1 + 3p_3 + 4p_4 + \ldots = -k - 2p_2 \leqq -k + 2(m + 2k) = 2m + 3k,$$

so daß mit Rücksicht auf (211) die Anzahl der Elemente vom System (p) beschränkt (nämlich $\leqq 2m + 3k$) ist, und die Summe in (209) aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Beweis. Die Voraussetzungen unseres Satzes bleiben, wie schon gesagt, gültig, wenn a und α, b und β, f und φ, ... usw. vertauscht werden und zugleich i durch $-i$ ersetzt wird. Durch diese Vertauschung und Ersetzung geht die durch (11) definierte Funktion $\chi_\mu(\eta)$ über in die durch (15) definierte Funktion $g_m(y)$, so daß dadurch Hilfssatz 4 sich in Hilfssatz 23 verwandelt. Hilfssatz 4 ist richtig, also auch Hilfssatz 23.

Hilfssatz 24. *Für jedes ganze $m \geqq 0$ und jedes ganze $k \geqq 0$ ist*

$$(213)\quad g_m^{(k)}(y) = \sum_{(q)} K_{10}(q,m)\,\chi^{(q_1)}(\eta)\,(f''(y))^{q_2+\frac{1}{2}}(f'''(y))^{q_3}(f^{\mathrm{IV}}(y))^{q_4}\ldots,$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (q) von ganzen Zahlen $q_1, q_2, \ldots$ mit

$$(214)\qquad -q_1+2q_2+3q_3+4q_4+\ldots = k;$$

$$(215)\qquad q_3 \geqq 0,\quad q_4 \geqq 0,\quad \ldots;$$

$$(216)\quad 0 \leqq q_1 \leqq 2m+3k;\quad q_2-q_1 \leqq -m;\quad q_3-2q_1 \geqq -3m-4k,$$

und wo $K_{10}(q,m)$ eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom System (q) und von der Zahl m abhängt.

Vorbemerkung. Wegen (216) ist bei gegebenen m und k die Anzahl der verschiedenen Werte von q_1 und q_2 beschränkt, so daß nach (214) und (215) die Anzahl der Elemente jedes Systems (q) und auch die Anzahl der verschiedenen Systeme (q) bei gegebenen m und k beschränkt sind.

Beweis. Für jedes $\varkappa \geqq 3$ ist nach Hilfssatz 1

$$\varphi^{(\varkappa)}(\eta) = \sum_{(r)} K_1(r)\,(f''(y))^{r_2}(f'''(y))^{r_3}\ldots,$$

mit

$$2r_2+3r_3+4r_4+\ldots = -\varkappa;$$
$$r_3 \geqq 0,\quad r_4 \geqq 0,\quad \ldots;$$
$$-2\varkappa \leqq r_2 \leqq -\varkappa,$$

also für jedes ganze $p_\varkappa \geqq 0$

$$(\varphi^{(\varkappa)}(\eta))^{p_\varkappa} = \sum_{(s)} K_{11}(s)\,(f''(y))^{s_2}(f'''(y))^{s_3}\ldots,$$

mit

$$2s_2+3s_3+4s_4+\ldots = p_\varkappa(2r_2+3r_3+4r_4+\ldots) = -\varkappa p_\varkappa;$$
$$s_3 \geqq 0,\quad s_4 \geqq 0,\quad \ldots;$$
$$-2\varkappa p_\varkappa \leqq s_2 \leqq -\varkappa p_\varkappa,$$

somit

$$(217)\qquad \prod_{\varkappa \geqq 3}(\varphi^{(\varkappa)}(\eta))^{p_\varkappa} = \sum_{(t)} K_{12}(t)\,(f''(y))^{t_2}(f'''(y))^{t_3}\ldots,$$

mit

$$(218)\qquad 2t_2+3t_3+4t_4+\ldots = -\sum_{\varkappa \geqq 3}\varkappa p_\varkappa;$$

$$(219)\qquad t_3 \geqq 0,\quad t_4 \geqq 0,\quad \ldots;$$

$$(220)\qquad -2\sum_{\varkappa \geqq 3}\varkappa p_\varkappa \leqq t_2 \leqq -\sum_{\varkappa \geqq 3}\varkappa p_\varkappa.$$

Wenden wir jetzt den vorigen Hilfssatz an und ersetzen wir in der rechten Seite von (209) das Produkt

$$\prod_{\varkappa \geqq 3} (\varphi^{(\varkappa)}(\eta))^{p_\varkappa}$$

durch die rechte Seite von (217), dann erhalten wir (213), und zwar mit

$$q_1 = p_1; \quad q_2 = -p_2 + t_2; \quad q_h = t_h \qquad (h \geqq 3). \tag{221}$$

Jetzt erübrigt uns noch die Beziehungen (214), (215) und (216) zu zeigen.

Es ist

$$\begin{aligned} -q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots &= -p_1 - 2p_2 + \sum_{h \geqq 2} h t_h && \text{wegen (221)} \\ &= -\sum_{h \geqq 1} h p_h && \text{wegen (218)} \\ &= k && \text{wegen (210)}, \end{aligned}$$

womit (214) bewiesen ist.

Aus (221) und (219) folgt unmittelbar (215).

Wegen (221) und (211) ist $q_1 \geqq 0$; es ist

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 && \text{wegen (221)} \\ &= -k - 2p_2 - 3p_3 - 4p_4 \ldots\ldots && \text{wegen (210)} \\ &\leqq -k - 2p_2 && \text{wegen (211)} \\ &\leqq -k + 2(m + 2k) = 2m + 3k && \text{wegen (212)}, \end{aligned}$$

so daß die erste der Ungleichungen (216) bewiesen ist.

Außerdem ist noch

$$\begin{aligned} q_2 - q_1 &= -p_1 - p_2 + t_2 && \text{wegen (221)} \\ &\leqq -p_1 - p_2 - \sum_{\varkappa \geqq 3} \varkappa p_\varkappa && \text{wegen (220)} \\ &= -\sum_{\varkappa \geqq 1} \varkappa p_\varkappa + p_2 = k + p_2 && \text{wegen (210)} \\ &\leqq k - m - k = -m && \text{wegen (212)}, \end{aligned}$$

womit die zweite der Ungleichungen (216) bewiesen ist, und schließlich ist

$$\begin{aligned} q_2 - 2q_1 &= -2p_1 - p_2 + t_2 && \text{wegen (221)} \\ &\geqq -2p_1 - p_2 - 2\sum_{\varkappa \geqq 3} \varkappa p_\varkappa && \text{wegen (220)} \\ &= -2\sum_{\varkappa \geqq 1} \varkappa p_\varkappa + 3p_2 = 2k + 3p_2 && \text{wegen (210)} \\ &\geqq 2k - 3(m + 2k) = -3m - 4k && \text{wegen (212)}; \end{aligned}$$

hiermit ist die letzte der Ungleichungen (216), also Hilfssatz 24 bewiesen.

Hilfssatz 25. *Es seien R, m und k fest; m ganz $\geqq 0$, k ganz $\geqq 0$. Dann ist*

$$(222)\quad g_m^{(k)}(y) = \sum_{(q)} K_{10}(q,m) \sum_{0 \leqq \mu < \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}k - m} \chi_\mu^{(q_1)}(\eta)(f''(y))^{q_2+\frac{1}{2}}(f'''(y))^{q_3}(f^{\mathrm{IV}}(y)^{q_4} \ldots + O\left(e^{r(y)}x^{-R}(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}\right)$$

gleichmäßig in y, wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (q) von ganzen Zahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ mit (214), (215) und (216), und wo $K_{10}(q,m)$ dieselben Koeffizienten wie in (213) bezeichnen.

Beweis. Bezeichnen wir die in (222) vorkommende Doppelsumme mit $\sum$, so ist nach dem vorigen Hilfssatz

$$g_m^{(k)}(y) - \sum = \sum_{(q)} K_{10}(q,m)\left\{\chi^{(q_1)}(\eta) - \sum_{0 \leqq \mu < \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}k - m} \chi_\mu^{(q_1)}(\eta)\right\} f''(y))^{q_2+\frac{1}{2}}(f'''(y))$$

$$= O \sum_{(q)} \frac{e^{r(y)}(f''(y))^{-\frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{4}}}{x^{R-k-2m+q_1}} \cdot \frac{(f''(y))^{+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2q_2+3q_3+4q_4+\ldots)}}{x^{3q_3+4q_4+\ldots}}$$

(nach (12) mit $\nu = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}k - m$ und nach (2))

$$= O \sum_{(q)} \frac{e^{r(y)}(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}} x^{2(q_2-q_1)+2m}}{x^{R-q_1+2q_2+3q_3+\ldots-k}}$$

wegen (214); der Exponent von x im Zähler ist $\leqq 0$ wegen (216), und der Exponent von x im Nenner ist R wegen (214), also

$$g_m^{(k)}(y) - \sum = O\,\frac{e^{r(y)}(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^R},$$

was zu beweisen war.

Hilfssatz 26. *Für jedes ganze $m \geqq 0$, jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste R ist*

$$(223)\quad g_m^{(k)}(y) = \sum_{(p)} K_{13}(p,m)\, g^{(p_1)}(y)(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3} \ldots + O\left(e^{r(y)}x^{-R}(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}\right),$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ mit

$$(224)\quad p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = k;$$

$$(225)\quad p_1 \geqq 0, \quad p_3 \geqq 0, \quad p_4 \geqq 0, \quad \ldots;$$

$$(226)\quad \frac{1}{2}(k-R) < p_2 \leqq -m,$$

und $K_{13}(p,m)$ eine geeignet gewählte Zahl bezeichnet, die nur vom Zahlensystem (p) und von der Zahl m abhängt.

Beweis. Ich wende den vorigen Hilfssatz an, so daß ich (222) erhalte, und in der rechten Seite von (222) ersetze ich $\chi_\mu^{(q_1)}(\eta)$ durch den in (40) gefundenen Ausdruck, nämlich durch

$$\chi_\mu^{(q_1)}(\eta) = \sum_{(r)} K_5(r,\mu)\, g^{(r_1)}(y)\,(f''(y))^{r_2-\frac{1}{2}}(f'''(y))^{r_3}\ldots,$$

wo die Summe erstreckt wird über die Systeme (r) von ganzen Zahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ mit

$$r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots = -q_1; \tag{227}$$

$$r_1 \geqq 0, \quad r_3 \geqq 0, \quad r_4 \geqq 0, \quad \ldots; \tag{228}$$

$$-\mu - 2q_1 \leqq r_2 \leqq -\mu - q_1. \tag{229}$$

Durch diese Substitution bekomme ich (223), und zwar mit

$$p_1 = r_1; \quad p_h = r_h + q_h \qquad (h \geqq 2) \tag{230}$$

und mit

$$K_{14}(p,m,R) = \sum_{(q),(r),\mu} K_{10}(q,m)\, K_5(r,\mu) \tag{231}$$

tatt $K_{13}(p,m)$; die Summe in (231) wird erstreckt über die Systemes (q) und (r) von ganzen Zahlen mit (214), (215), (216), (227), (228) und (229) und über die ganzen Zahlen $\mu \geqq 0$ und $< \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}k - m$.

Es ist

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots &= r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \ldots + 2q_2 + 3q_3 + \ldots && \text{wegen (230)} \\ &= -q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \ldots && \text{wegen (227)} \\ &= k && \text{wegen (214),} \end{aligned}$$

so daß (224) gilt.

Aus (230), (228) und (215) folgt unmittelbar (225), und außerdem ist

$$\begin{aligned} p_2 &= r_2 + q_2 && \text{wegen (230)} \\ &\leqq -\mu - q_1 + q_2 && \text{wegen (229)} \\ &\leqq -\mu - m && \text{wegen (216)} \\ &\leqq -m && \text{wegen } \mu \geqq 0. \end{aligned} \tag{232}$$

Jedes Glied in (223) ist wegen (4) mit p_1 statt k und wegen (2)

$$= O\, e^{r(y)} \cdot \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}p_1+\frac{1}{4}}}{x^{p_1}} \cdot \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}(2p_2+3p_3+4p_4+\ldots)}}{x^{3p_3+4p_4+\ldots}}$$

$$= O\, e^{r(y)} \frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^{k-2p_2}}$$

wegen (224). Die Glieder mit $p_2 \leqq \frac{1}{2}(k-R)$ können also in das Restglied aufgenommen werden, so daß nur die Glieder mit $p_2 > \frac{1}{2}(k-R)$ in Betracht kommen.

Hiermit sind die Beziehungen (224), (225) und (226) bewiesen.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß die Koeffizienten $K_{14}(p, m, R)$ nur vom System (p) und von der Zahl m, aber nicht von der Zahl R abhängen. Wegen (232) ist $\mu \leqq -p_2 - m$, also wegen (226)

$$\mu \leqq -p_2 - m < \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}k - m,$$

so daß μ nur durch die Reihe der ganzen Zahlen $\geqq 0$ und $\leqq -p_2 - m$ läuft. Hieraus ergibt sich, daß $K_{14}(p, m, R)$ nicht von R abhängt, also $K_{13}(p, m)$ genannt werden darf.

Hilfssatz 27. *Für jedes feste ganze $k \geqq 0$ und jedes feste R ist*

$$(233)\quad \begin{cases} G^{(k)}(y) - g^{(k)}(y) = \sum\limits_{(p)} K_{15}(p)\, g^{(p_1)}(y)(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3}\ldots \\ \qquad\qquad + O\, e^{r(y)}\dfrac{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^R}, \end{cases}$$

erstreckt über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ mit

$$(234)\qquad p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = k;$$

$$(235)\qquad p_1 \geqq 0,\ p_3 \geqq 0,\ p_4 \geqq 0,\ \ldots;$$

$$(236)\qquad \frac{1}{2}(k-R) < p_2 \leqq 0,$$

und wobei $K_{15}(p)$ eine geeignet gewählte Zahl ist, die durch das System (p) eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Nach (207) mit $n = \frac{1}{2}(R-k)$ ist

$$G^{(k)}(y) = \sum_{\substack{0 \leqq m < \frac{1}{2}(R-k) \\ m \text{ ganz}}} g_m^{(k)}(y) + O\, e^{r(y)}\frac{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^R}$$

also nach dem vorigen Hilfssatz

$$(237)\quad \begin{cases} G^{(k)}(y) = \sum\limits_{\substack{0 \leqq m < \frac{1}{2}(R-k) \\ m \text{ ganz}}} \sum\limits_{(p)} K_{13}(p, m)\, g^{(p_1)}(y)(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3}\ldots \\ \qquad\qquad + O\, e^{r(y)}\dfrac{(f''(y))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^R}, \end{cases}$$

wo die Summe $\sum\limits_{(p)}$ erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ mit (224), (225) und (226). Wegen $m \geqq 0$ folgt aus (237)

$$(238)\qquad \left\{\begin{aligned} G^{(k)}(y) &= \sum_{(p)} K_{16}(p, R)\, g^{(p_1)}(y)\,(f''(y))^{p_2}(f'''(y))^{p_3}\dots \\ &\qquad + O\, e^{r(a)}\,\frac{(f''(a))^{\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}}}{x^R}, \end{aligned}\right.$$

wo die Summe $\sum_{(p)}$ erstreckt wird über die Systeme (p) von ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \dots$ mit (234), (235) und (236); hierin wird der Koeffizient $K_{16}(p, R)$ definiert durch

$$K_{16}(p, R) = \sum_{\substack{0 \leqq m < \frac{1}{2}(R-k) \\ m \text{ ganz}}} K_{13}(p, m).$$

Aber wegen (226) ist $m \leqq -p_2$ und wegen (236) ist $-p_2 < \frac{1}{2}(R-k)$, so daß m nicht die Reihe der ganzen Zahlen $\geqq 0$ und $< \frac{1}{2}(R-k)$, sondern nur die Reihe der ganzen Zahlen $\geqq 0$ und $< -p_2$ durchläuft, d. h. es ist

$$K_{16}(p, R) = \sum_{0 \leqq m < -p_2} K_{13}(p, m),$$

d. h. $K_{16}(p, R)$ ist unabhängig von R und darf also $K_{17}(p)$ genannt werden.

Aus (238) folgt (233), und zwar mit

$$\begin{aligned} K_{15}(p) &= K_{17}(p) - 1 \qquad \text{für das System } (p) = (k, 0, 0, \dots); \\ &= K_{17}(p) \qquad \text{für die übrigen Systeme } (p). \end{aligned}$$

Hilfssatz 28. *Erfüllt $H(u)$ Voraussetzung H, so ist für jedes feste R und jedes feste ganze $m \geqq 0$*

$$(239)\qquad H^{(m)}(u) = O(u^R), \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$$

gleichmäßig in u,

Beweis. Da $H(u)$ nicht von x abhängt, ist (239) mit $R = 0$ evident. Relation (239) sei für ein bestimmtes R bewiesen und mit $R+1$ statt R zu beweisen. Dann ist

$$H^{(m+1)}(u) = O(u^R),$$

gleichmäßig in u, also wegen $H^{(m+1)}(0) = 0$,

$$\begin{aligned} H^{(m)}(u) &= \int_0^u H^{(m+1)}(v)\, dv \\ &= O \int_0^u v^R\, dv = O(u^{R+1}), \end{aligned}$$

womit Hilfssatz 28 bewiesen ist.

Hilfssatz 29. *Ist bei geeignet gewähltem k in (233) wenigstens einer der Koeffizienten $K_{15}(p) \neq 0$, so ist es möglich, in dem Satze dieser Arbeit mit*

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad r(y) = 1 \tag{240}$$

die Funktionen $f(y)$ und $g(y)$ so zu wählen, daß bei geeignet gewählten absoluten Konstanten K_{18}, M und ε ($K_{18} \neq 0$, $\varepsilon > 0$) im Intervall $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x \geqq 4$ vorausgesetzt)

$$G^{(k)}(y) - g^{(k)}(y) = \frac{K_{18}}{x^M} + O\frac{1}{x^{M+\varepsilon}}, \tag{241}$$

$$\frac{1}{f''(y)} = O\frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad f''(y) = O\,x^2 \tag{242}$$

gleichmäßig in y ist.

Beweis. Es sei $(q) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ein System mit der Eigenschaft, daß der zugehörige in (233) auftretende Koeffizient $K_{15}(q) \neq 0$ ist. Ich werde dabei, was offenbar möglich ist, dies System (q) so wählen, daß entweder $q_1 = 0$ ist oder sonst für jedes System $(p) = (p_1, p_2, \ldots)$ mit $p_1 < q_1$ der Koeffizient $K_{15}(p) = 0$ ist.

Es bezeichne Θ irgend eine feste transzendente Zahl > 2, $H(u)$ eine Funktion, die Voraussetzung H erfüllt, und es werde gesetzt

$$g(y) = \frac{y^{q_1}}{q_1!} H(2|y|); \tag{243}$$

$$f(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \sum_{3 \leqq h \leqq n} \frac{1}{h!} x^{-\Theta^{h-2}} y^h. \tag{244}$$

Ich werde zunächst zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes dieser Arbeit dann erfüllt sind.

1. Wegen (240) ist $a < b$; im Intervall $a \leqq y \leqq b$ ist $f(y)$ unendlich oft differentiierbar[18]); wegen (244), $\Theta > 2$ und $|y| \leqq \frac{1}{2}$ ist

$$f''(y) \sim x^2, \tag{245}$$

so daß (242) gilt, und $f''(y)$ bei hinreichend großem x positiv ist. Es ist

$$f^{(h)}(y) = 0 \qquad \text{für jedes } h \geqq n+1; \tag{246}$$

wegen (244), $\Theta > 2$ und $|y| \leqq \frac{1}{2}$ ist

$$f^{(h)}(y) \sim x^{-\Theta^{h-2}} \qquad \text{für } 3 \leqq h \leqq n; \tag{247}$$

[18]) Siehe Fußnote [1]).

für jedes feste ganze $h \geqq 3$ ist somit

$$f^{(h)}(y) = O(1),$$

so daß (2) wegen (245) gilt.

2. Wegen (240) verschwindet die linke Seite von (3).

3. Um zu zeigen, daß $g(y)$ beliebig oft differentiierbar ist, braucht man nur zu zeigen, daß $H(2\,y\,)$ im Punkte $y = 0$ unendlich oft differentiiert werden kann, und das ist so, da nach (62) jede Derivierte nach links und auch jede Derivierte nach rechts Null ist. Da $g(y)$ nicht von x abhängt, ist für jedes feste ganze $h \geqq 0$

$$g^{(h)}(y) \quad O(1),$$

gleichmäßig in y, so daß wegen (240) und (245)

$$e^{-r(y)} \frac{g^{(h)}(y)}{(f''(y))^{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}}} = 1 \cdot \frac{O(1)}{x^{2(\frac{1}{2}h+\frac{1}{4})}} = O\left(\frac{1}{x^h}\right)$$

gleichmäßig in y ist. Wegen (62) schließlich ist $g^{(h)}(\pm\frac{1}{2}) = 0$ für jedes $h \geqq 0$, so daß die linken Seiten von (5) und (6) verschwinden.

Wir wissen also jetzt, daß die Voraussetzungen des Satzes dieser Arbeit erfüllt sind. Also jetzt noch der Beweis von (241). Dazu zunächst eine Bemerkung über $g(y)$.

Für jedes ganze $p_1 \geqq q_1$ ist wegen (243) und (62)

$$(248) \qquad \begin{cases} g^{(p_1)}(0) = \binom{p_1}{q_1} 2^{p_1-q_1} H^{(p_1-q_1)}(0) = 0 & \text{falls } p_1 \geqq q_1+1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 1 & \text{falls } p_1 = q_1 \end{cases}$$

und

$$g^{(p_1)}(y) - g^{(p_1)}(0) = \int_0^y g^{(p_1+1)}(u)\,du$$

$$= \sum_{h=0}^{q_1} (\pm 1)^{p_1+1-h} \binom{p_1+1}{h} \cdot \frac{2^{p_1+1-h}}{(q_1-h)!} \int_0^y u^{q_1-h} H^{(p_1+1-h)}(2\,|\,u\,|)\,du,$$

wo das Plus- oder Minuszeichen benutzt wird, je nachdem $y \geqq 0$ oder < 0 ist. Nach dem vorigen Hilfssatz ist also für jedes feste R_1

$$g^{(p_1)}(y) - g^{(p_1)}(0) = O \sum_{h=0}^{q_1} \int_0^{|y|} u^{R_1}\,du = O(|y|^{R_1+1}),$$

also nach (248) für jedes feste ganze $p_1 \geqq q_1$

$$\begin{aligned} g^{(p_1)}(y) &= O(|y|^{R_1+1}) && \text{falls } p_1 \geqq q_1+1 \\ &= 1 + O(|y|^{R_1+1}) && \text{falls } p_1 = q_1. \end{aligned}$$

Setze ich

$$K_{19}(p) = -2p_2 + \sum_{3 \leqq h \leqq n} \Theta^{h-2} p_h, \tag{249}$$

und wähle ich

$$R_1 + 1 \geqq 2k + 2K_{19}(q) + 2 \text{ und } R_1 + 1 \geqq 4, \tag{250}$$

so finde ich für jedes y, das absolut $\leqq \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist, und für jedes feste ganze $p_1 \geqq q_1$

$$\begin{cases} g^{(p_1)}(y) = O\, x^{-k-K_{19}(q)-1} & \text{falls} \quad p_1 \geqq q_1 + 1 \\ \qquad = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls} \quad p_1 = q_1. \end{cases} \tag{251}$$

Es werde jetzt Hilfssatz 27 angewendet mit

$$R > k + K_{19}(q). \tag{252}$$

Wir haben das System $(q) = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ so gewählt, daß für jedes System $(p) = (p_1, p_2, \ldots)$ mit $p_1 < q_1$ der Koeffizient $K_{15}(p)$ verschwindet. In (233) kommen also nur die Systeme $(p) = (p_1, p_2, \ldots)$ mit $p_1 \geqq q_1$ in Betracht. Außerdem kommen dabei auch allein diejenigen Glieder in Betracht, die nur die Derivierten $f''(y)$, $f'''(y), \ldots, f^{(n)}(y)$ und keine höherer Ordnung enthalten, da die Glieder, in denen Derivierte höherer Ordnung auftreten, wegen (246) verschwinden. Somit ist

$$G^{(k)}(y) - g^{(k)}(y) = \sum_{(p)} K_{15}(p)\, g^{(p_1)}(y) (f''(y))^{(p_2)} \ldots (f^{(n)}(y))^{p_n} \tag{253}$$

mit

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = k; \\ p_1 \geqq q_1,\ p_3 \geqq 0, \ldots, p_n \geqq 0; \\ \frac{1}{2}(k - R) < p_2 \leqq 0;\ K_{15}(p) \neq 0. \end{cases} \tag{254}$$

Ich zerlege die Summe $\sum_{(p)}$ in zwei Teilsummen

$$\sum_{(p)} = \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}} + \sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}}; \tag{255}$$

die erste Teilsumme wird erstreckt über die Systeme (p) von ganzen Zahlen mit (254) und $p_1 = q_1$; die zweite Teilsumme über die Systeme (p) von ganzen Zahlen mit (254) und $p_1 \geqq q_1 + 1$. Die zweite Teilsumme ist wegen (251) und (2)

$$\sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}} = O \sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}} x^{-k-K_{19}(q)-1} \cdot (f''(y))^{\frac{1}{2}(2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n)},$$

und hierin ist

$$\begin{aligned} (f''(y))^{\frac{1}{2}(2p_2+3p_3+\ldots+np_n)} &= (f''(y))^{\frac{1}{2}(k-p_1)} && \text{wegen (254)} \\ &= O\, x^{k-p_1} && \text{wegen (245)} \\ &= O\, x^{k-1} \end{aligned}$$

wegen $p_1 \geqq q_1 + 1 \geqq 1$, also

$$(256) \qquad \sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}} = O \sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}} x^{-k-K_{19}(q)-1} x^{k-1} = O\, x^{-K_{19}(q)-2}.$$

Wegen (244) und $\Theta > 2$ ist

$$f''(y) = x^2 + O(x^{-\Theta}) = x^2\left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

gleichmäßig in y, und für jedes $h \geqq 3$ und $\leqq n$ ist

$$\begin{aligned} f^{(h)}(y) &= x^{-\Theta^{h-2}} + O\, x^{-\Theta^{h-1}} \\ &= x^{-\Theta^{h-2}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{x^{\Theta^{h-1}-\Theta^{h-2}}}\right)\right\} \\ &= x^{-\Theta^{h-2}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

da wegen $\Theta > 2$ und $h \geqq 3$

$$\Theta^{h-1} - \Theta^{h-2} = \Theta^{h-2}(\Theta - 1) > 2^1 \cdot 1 = 2$$

ist. Jedes Glied der Summe $\sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}}$ ist somit wegen (251)

$$K_{15}(p) \cdot \left\{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} \cdot x^{2p_2 - \sum_{3 \leqq h \leqq n} \Theta^{h-2} p_h} = K_{15}(p)\left\{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} x^{-K_{19}(p)}$$

wegen (249), also

$$(257) \qquad \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}} = \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}} K_{15}(p)\left\{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} x^{-K_{19}(p)};$$

diese Summe wird erstreckt über die Systeme (p) von ganzen Zahlen mit (254) und $p_1 = q_1$, so daß die Summe wenigstens ein Glied, nämlich das Glied mit $(p) = (q)$ enthält (denn wegen (252) ist $\frac{1}{2}(k - R) < q_2$). Ist $n = 1$ oder 2, so besteht wegen (254) und $p_1 = q_1$ diese Summe nur aus diesem Glied, und wird dann $K_{19}(q) = M$, $K_{15}(q) = K_{18}$ gesetzt, dann ist

$$(258) \qquad \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}} = K_{18}\, x^{-M} + O\, x^{-M-2},$$

so daß aus (255), (258) und (256) Beziehung (241) mit $\varepsilon = 2$ folgt, also alles bewiesen ist. Wir können also weiterhin $n \geqq 3$ annehmen.

Ich betrachte jetzt alle Systeme (p) von ganzen Zahlen $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ mit

$$(259) \qquad \begin{cases} p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = k; \\ p_1 = q_1;\ p_3 \geqq 0; \ldots, p_n \geqq 0; \\ p_2 \leqq 0; \quad K_{15}(p) \neq 0. \end{cases}$$

(Unter diesen Systemen kommt jedenfalls das System (q) vor.) Für zwei verschiedene Systeme (p) mit (259) ist auch $K_{19}(p)$ verschieden; denn aus $K_{19}(p) = K_{19}(r)$ würde folgen

$$-2p_2 + \sum_{h=3}^{n} \Theta^{h-2} p_h = -2r_2 + \sum_{h=3}^{n} \Theta^{h-2} r_h,$$

also, da Θ transzendent ist,

$$p_h = r_h \qquad (2 \leqq h \leqq n),$$

so daß wegen $p_1 = q_1$, $r_1 = q_1$ die Systeme (p) und (r) dieselben sein würden. Da $K_{19}(p)$ eine Summe von nicht-negativen Gliedern ist, die unbeschränkt wächst, wenn mindestens eine der Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ unbeschränkt zunimmt, kommt unter den Zahlen $K_{19}(p)$, wenn (p) alle Systeme mit (259) durchläuft, eine kleinste vor, d. h. unter den Systemen (p) mit (259) gibt es ein System (s) mit $K_{19}(s) = M$, während für alle anderen Systeme (p) mit (259) die Zahl $K_{19}(p)$ größer als M, sogar $\geqq M + \varepsilon$ ist, wo ε eine geeignet gewählte positive absolute Konstante $\leqq 2$ bezeichnet. Da (q) unter den Systemen (p) mit (259) vorkommt, ist

$$K_{19}(q) \geqq K_{19}(s) = M, \tag{260}$$

so daß wir wegen $\varepsilon \leqq 2$ statt (256) schreiben können

$$\sum_{\substack{(p) \\ p_1 > q_1}} = O(x^{-M-\varepsilon}). \tag{261}$$

Wegen (252) und (260) ist $R > k + K_{19}(s)$, also wegen (249)

$$2s_2 = \sum_{h=3}^{n} \Theta^{h-2} s_h - K_{19}(s) \geqq -K_{19}(s) > k - R,$$

so daß die Summe $\sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}}$ das Glied mit $(p) = (s)$ enthält. Wird nun $K_{15}(s) = K_{18}$ (also $K_{18} \neq 0$) gesetzt, dann ist wegen (257)

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1}} &= K_{15}(s)\left\{1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\} x^{-K_{19}(s)} + O \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1 \\ (p) \neq (s)}} x^{-K_{19}(p)} \\ &= K_{18}\, x^{-M} + O(x^{-M-2}) + O \sum_{\substack{(p) \\ p_1 = q_1 \\ (p) \neq (s)}} x^{-M-\varepsilon} \\ &= K_{18}\, x^{-M} + O(x^{-M-\varepsilon}) \end{aligned}\right. \tag{262}$$

wegen $\varepsilon \leqq 2$. Aus (253), (255), (262) und (261) folgt (241).

Nach diesen Hilfssätzen liegt der Beweis von Behauptung 8, d. h. von (208) auf der Hand. Dazu brauche ich nur zu zeigen, daß für jedes ganze $k \geqq 0$ jeder in (233) auftretende Koeffizient $K_{15}(p)$ gleich Null ist. Nehmen wir an, dies wäre bei geeignet gewähltem k nicht der Fall.

1. Es sei $k = 0$. Da in unserem Satze a und α, b und β, ... usw. vertauscht werden dürfen, wenn dann nur i durch $-i$, und $\chi(\eta)$ durch $G(y)$ ersetzt wird, ist nach der approximativen Funktionalgleichung (14)

$$\sum_{\substack{\alpha \leqq \nu \leqq \beta \\ \nu \text{ ganz}}} \chi(\nu)\, e^{-2\pi i \varphi(\nu)} - \sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} G(n)\, e^{2\pi i f(n)}$$

$$= O\left\{ \frac{e^{\varrho(\alpha)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\varphi''(\alpha)}} + \sqrt[4]{\varphi''(\alpha)} \right) + \frac{1}{x^R} \int_\alpha^\beta e^{\varrho(\eta)} \left((\varphi''(\eta))^{\frac{1}{4}} + (\varphi''(\eta))^{\frac{3}{4}} \right) d\eta \right\}$$

$$= O\left\{ \frac{e^{r(a)}}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} \right) + \frac{1}{x^R} \int_a^b e^{r(y)} \left((f''(y)^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}} \right) dy \right\}$$

wegen (57) und (58), so daß aus der Funktionalgleichung (14) folgt

$$(263) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{a \leqq n \leqq b \\ n \text{ ganz}}} \{G(n) - g(n)\}\, e^{2\pi i f(n)} = \\ O\left\{ \dfrac{e^{r(a)}}{x^R} \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{f''(a)}} + \sqrt[4]{f''(a)} \right) + \dfrac{1}{x^R} \displaystyle\int_a^b e^{r(y)} \left((f''(y))^{\frac{1}{4}} + (f''(y))^{\frac{3}{4}} \right) dy \right\}. \end{cases}$$

Jetzt wählen wir a, b, f, g, r wie in Hilfssatz 29 angegeben ist. Dann enthält die Summe in der linken Seite der letzten Beziehung nur ein Glied, nämlich

$$\{G(0) - g(0)\}\, e^{2\pi i f(0)} = \frac{K_{18}\, e^{2\pi i f(0)}}{x^M} + O\left(\frac{1}{x^{M+\varepsilon}} \right)$$

und die rechte Seite von (263) ist wegen (240) und (242)

$$O\left\{ \frac{1}{x^R} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} + \sqrt[4]{x^2} \right) + \frac{1}{x^R} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \left((x^2)^{\frac{1}{4}} + (x^2)^{\frac{3}{4}} \right) dy \right\} = O\left(\frac{1}{x^{R-\frac{3}{2}}} \right),$$

so daß wir finden würden

$$\frac{K_{18}}{x^M}\, e^{2\pi i f(0)} = O\left(\frac{1}{x^{M+\varepsilon}} \right) + O\left(\frac{1}{x^{R-\frac{3}{2}}} \right).$$

Hierin sind K_{18}, M und ε $(K_{18} \neq 0, \varepsilon > 0)$ unabhängig von R und x; R ist eine beliebige feste Zahl. Wähle ich jetzt $R = M + \varepsilon + \frac{3}{2}$, so erhalte ich

$$(264) \qquad K_{18} = O\left(\frac{1}{x^\varepsilon} \right), \quad K_{18} \neq 0,$$

womit der Widerspruch gefunden ist.

2. Es sei $k \geqq 1$, und es sei Behauptung 8 mit $k-1$ statt k schon bewiesen. Alsdann ist unter den Voraussetzungen unseres Satzes stets

$$G^{(k-1)}(y) - g^{(k-1)}(y) = O\, e^{r(y)}\, x^{-R} (f''(y))^{\frac{1}{2}(k-1)+\frac{1}{4}}. \tag{265}$$

Wählen wir wieder a, b, f, g und r wie in Hilfssatz 29, dann finden wir

$$\begin{aligned} &\left\{ G^{(k-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - g^{(k-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\} - \left\{ G^{(k-1)}(0) - g^{(k-1)}(0)\right\} \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left\{ G^{(k)}(y) - g^{(k)}(y)\right\} dy = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left\{ \frac{K_{18}}{x^M} + O\left(\frac{1}{x^{M+\varepsilon}}\right)\right\} dy \\ &= \frac{K_{18}}{x^{M-\frac{1}{2}}} + O\,\frac{1}{x^{M+\varepsilon-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{266}$$

Wegen (265), (240) und (242) ist

$$G^{(k-1)}(y) - g^{(k-1)}(y) = O \cdot 1 \cdot x^{-R} \cdot x^{(k-1)+\frac{1}{2}} = O\, x^{-R+k-\frac{1}{2}},$$

so daß auch die linke Seite von (266) höchstens diese Größenordnung besitzt. Somit ist

$$\frac{K_{18}}{x^{M-\frac{1}{2}}} = O\,\frac{1}{x^{M+\varepsilon-\frac{1}{2}}} + O\,\frac{1}{x^{R-k+\frac{1}{2}}},$$

und wählen wir R so, daß $R - k + \frac{1}{2} = M + \varepsilon - \frac{1}{2}$ ist, dann finden wir den Widerspruch (264) zurück.

Hiermit ist der Satz vollständig bewiesen.

Rotterdam, 2. August 1927.

(Eingegangen am 3. August 1927.)

Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme.

(Zweite Mitteilung.)

Von

J. G. van der Corput in Groningen.

Zweck dieser Mitteilung[1]) ist den Zusammenhang zu zeigen zwischen den Summen

$$S_m = \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i m f(n)}$$

(a und b ganz, $a < b$; $f(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ reell, m ganz $\geqq 1$) einerseits und der Anzahl $A(G)$ der Gitterpunkte des Bereiches

$$G \ldots a \leqq u \leqq b, \qquad q \leqq v \leqq f(u)$$

andererseits; hierbei wird vorausgesetzt, daß die ganze Zahl q so gewählt ist, daß im Intervall $a \leqq u \leqq b$ $f(u) \geqq q$ ist. Wir werden nämlich zeigen: ist für den Absolutwert jeder Summe S_m eine obere Schranke[2]) bekannt, dann kann man daraus eine Abschätzung für die Anzahl $A(G)$ ableiten. In dieser Mitteilung gebe ich jedem Gitterpunkte das Gewicht 1, d. h.

$$A(G) = \Sigma 1,$$

erstreckt über die Koordinatenpaare der Gitterpunkte von G, aber ein entsprechendes Resultat gilt, wenn ein Gitterpunkt mit den Koordinaten (u, v) das komplexe „Gewicht" $e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)}$ hat (λ und μ reell), d. h. falls $A(G)$ ersetzt wird durch die Summe $\sum e^{2\pi i(\lambda u + \mu v)}$, erstreckt über die Koordinatenpaare u und v der Gitterpunkte von G. Wie gesagt, ich beschränke

[1]) Erste Mitteilung: Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 250–259.

[2]) Aus der Theorie der Diophantischen Approximationen ergibt sich übrigens

$$\overline{\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \text{ ganz}}}} \left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i m f(n)} \right| = b - a + 1,$$

wie man auch die ganzen Zahlen a und b ($a < b$) und die Funktion $f(u)$ wählt, so daß $b - a + 1$ die kleinste von m unabhängige obere Schranke ist.

mich hier zu dem Fall, daß jeder Gitterpunkt das Gewicht 1 hat, so daß $A(G)$ geschrieben werden kann in die Gestalt

$$A(G) = \sum_{n=a}^{b} ([f(n)] - q + 1)$$
$$= -\sum_{n=a}^{b} \left(f(n) - [f(n)] - \tfrac{1}{2}\right) + \sum_{n=a}^{b} \left(f(n) - q + \tfrac{1}{2}\right).$$

Ich nehme an, daß man die letzte Summe hinreichend genau berechnen kann, z. B. mit der Eulerschen Summenformel, so daß es genügt, eine Abschätzung zu finden für die Summe

$$\sum_{n=a}^{b} \left(f(n) - [f(n)] - \tfrac{1}{2}\right);$$

und da es mir nicht mehr Mühe macht, werde ich statt dieser Summe eine allgemeinere betrachten, nämlich die Summe

$$\sum_{n=a}^{b} \psi(f(n)),$$

wobei $\psi(v)$ folgende Voraussetzung erfüllt:

Voraussetzung B: $\psi(v)$ bezeichne eine reelle Funktion von v mit der Periode 1, die absolut $\leqq 1$ und im Intervall $0 < v < 1$ monoton ist und die Eigenschaft

$$\int_0^1 \psi(v)\, dv = 0$$

besitzt. Hauptzweck dieser Arbeit ist

Satz 1. *Es sei a und b ganz, $a<b$, und die reelle Funktion $f(n)$ (n ganz, $a \leqq n \leqq b$) erfülle für jedes ganze $m \geqq 1$ die Ungleichung*

$$(1) \qquad \left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i m f(n)} \right| < B + \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \varrho_\nu m^{\varrho_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma m^{-\tau_\sigma}.$$

Es werde dabei vorausgesetzt, daß B, C_ν, D_σ, l, s, ϱ_ν, τ_σ positive von m unabhängige Zahlen bezeichnen (sie dürfen natürlich von der Funktion $f(n)$ und von den Zahlen a und b abhängen).

Dann gilt für jede Funktion $\psi(v)$, die Voraussetzung B erfüllt, die Ungleichung

$$(2) \qquad \left| \sum_{n=a}^{b} \psi(f(n)) \right| < 18(l+2)(\varrho+1) \left\{ B \log\left(3 + \frac{b-a}{B}\right) + \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu^{\frac{1}{1+\varrho_\nu}} (b-a)^{\frac{\varrho_\nu}{1+\varrho_\nu}} \right\} + 6 \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma \left(1 + \frac{1}{\tau_\sigma}\right),$$

wo ϱ die größte der Zahlen ϱ_ν bezeichnet.

Um diesen Satz anwenden zu können, braucht man also eine Abschätzung für die Summe S_m. Nehmen wir z. B. folgenden Satz, dessen Beweis ich demnächst veröffentlichen werde:

Satz 2. *Es sei a und b ganz, $a < b$, $R > 0$, k ganz $\geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, und $f(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ k-mal differentiierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach Innen) und es sei $f^{(k)}(u)$ beständig $\geqq \frac{1}{R}$ oder beständig $\leqq -\frac{1}{R}$. Wird*

$$P = R\left|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right|$$

gesetzt, so ist

$$\left|\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)}\right|$$

kleiner als

$$100\,P\left\{R^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + R^{\frac{2}{\varkappa}}\,P^{-\frac{2k}{\varkappa}} + P^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}.$$

Sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, so darf $f(u)$ durch $mf(u)$ (m ganz $\geqq 1$) ersetzt werden, wenn nur R durch $\frac{R}{m}$ ersetzt wird (P ändert sich also nicht). Wendet man die Behauptung von Satz 2 an, so findet man, daß (1) gilt mit

$$B = 100\,P\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{2}{\varkappa}};$$

$$l = 1;\ \varrho = \varrho_1 = \frac{1}{\varkappa - 2};\ C_1 = 100\,(\varkappa - 2)\,P \cdot \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{\varkappa-2}};$$

$$s = 1;\ \tau_1 = \frac{2}{\varkappa};\ D_1 = 100\,P\left(\frac{R}{P^k}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}.$$

Da $f^{(k)}(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ beständig $\geqq \frac{1}{R}$ oder beständig $\leqq -\frac{1}{R}$ ist, ist

$$\frac{P}{R} = \left|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right| \geqq \frac{b-a}{R},$$

also

$$b - a \leqq P,$$

so daß in der rechten Seite von (2) $b - a$ durch P ersetzt werden darf und

$$\log\left(3 + \frac{b-a}{B}\right) \leqq \log\left(3 + \frac{1}{100}P^{\frac{2}{\varkappa}}\right) < \log(3 + P)$$

ist. Wegen

$$18(l+2)(\varrho+1)\cdot 100 = 18\cdot 3\cdot\left(1+\frac{1}{\varkappa-2}\right)\cdot 100 < 5400\,\varkappa$$

$$18(l+2)(\varrho+1)\{100(\varkappa-2)\}^{\frac{1}{1+\varrho_1}} < 18\cdot 3\cdot\left(1+\frac{1}{\varkappa-2}\right)\cdot 100\cdot(\varkappa-2) < 5400\,\varkappa$$

und

$$6\cdot 100\cdot\left(1+\frac{2}{\varkappa}\right) < 5400\,\varkappa$$

findet man jetzt

Satz 3. *Sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, und genügt $\psi(v)$ Voraussetzung B, so ist*

$$\left|\sum_{n=a}^{b}\psi(f(n))\right| < 5400\,\varkappa P\left\{P^{-\frac{2}{\varkappa}}\log(3+P)+R^{-\frac{1}{\varkappa-1}}+R^{\frac{2}{\varkappa}}P^{-\frac{2k}{\varkappa}}\right\}.$$

Diese Abschätzung ist jedenfalls nicht trivial, falls P, R und $\frac{P^k}{R}$ sehr groß sind, und P von derselben Größenordnung wie $b-a$ ist. Der Spezialfall $k=2$ von Satz 3 enthält fast alle bis jetzt bekannte Gitterpunktabschätzungen.

Dem Beweise von Satz 1 schicken wir einige Hilfssätze voran:

Hilfssatz 1. *Es sei $0<\theta<1$; $\theta'>0$; es erfülle die Funktion $\psi_0(v)$ Voraussetzung B und sie sei im Intervall $0\leqq v<1$ monoton nicht-abnehmend. Ist $\theta'\geqq 1$, so sei $\varphi_0(v)$ für jedes v gleich Null; ist $0<\theta'<1$, so sei $\varphi_0(v)$ die Funktion mit der Periode 1, die im Intervall $0\leqq v\leqq\theta'$ den Wert $\theta'-1$, im Intervall $\theta'<v<1$ den Wert θ' hat, und es werde für jedes ganze $h\geqq 0$*

$$\psi_{h+1}(v)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\psi_h(v+y)\,dy;\qquad \varphi_{h+1}(v)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\varphi_h(v+y)\,dy$$

gesetzt. Dann gilt für jedes reelle v, für jedes ganze $h\geqq 0$ und für jedes $y\geqq 0$ mit der Eigenschaft $h\theta+y\leqq\theta'$ die Ungleichung

$$\psi_0(v)\leqq\psi_h(v+y)-2\varphi_h(v+y)+2\theta'. \tag{3}$$

Beweis: Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile, je nachdem $h=0$ oder >0 ist.

1. Es sei $h=0$. Dann muß gezeigt werden, daß für jedes $y\geqq 0$ und $\leqq\theta'$ die Ungleichung

$$\psi_0(v)\leqq\psi_0(v+y)-2\varphi_0(v+y)+2\theta' \tag{4}$$

gilt. Diese Ungleichung ist trivial, falls $\theta'\geqq 1$; denn dann ist $\psi_0(v)\leqq 1$, $\psi_0(v+y)\geqq -1$ und $\varphi_0(v+y)=0$. Wir können also $0<\theta'<1$ voraussetzen.

Außerdem brauchen wir wegen der Periodizität von $\psi_0(v)$ und $\varphi_0(v)$ nur den Fall zu betrachten, daß $0 \leqq v+y<1$ ist. Ist $0 \leqq v+y \leqq \theta'$, so ist $\psi_0(v) \leqq 1$, $\psi_0(v+y) \geqq -1$, $2\varphi_0(v+y) = -2+2\theta'$, so daß dann (4) gilt. Ist $\theta' < v+y<1$, also $0<v \leqq v+y<1$, dann ist $\varphi_0(v+y)=\theta'$ und $\psi_0(v) \leqq \psi_0(v+y)$, da $\psi_0(v)$ im Intervall $0 \leqq v<1$ monoton nicht-abnehmend ist, so daß auch in diesem Falle (4) gilt. Hiermit ist (4) vollständig bewiesen.

2. Es sei $h \geqq 1$ und es sei der Hilfssatz für $h-1$ statt h schon bewiesen, d. h. für jedes $z \geqq 0$ mit der Eigenschaft $(h-1)\theta+z \leqq \theta'$ gelte die Ungleichung

$$\psi_0(v) \leqq \psi_{h-1}(v+z) - 2\varphi_{h-1}(v+z) + 2\theta'. \tag{5}$$

Bezeichnet y irgend eine Zahl $\geqq 0$ mit der Eigenschaft $h\theta+y \leqq \theta'$, so gilt Ungleichung (5) für jedes z im Intervall $y \leqq z \leqq y+\theta$, denn für dieses z gelten die Beziehungen

$$(h-1)\cdot\theta+z \leqq h\theta-\theta+y+\theta = h\theta+y \leqq \theta'.$$

Wegen (5) ist also

$$\psi_0(v) \leqq \frac{1}{\theta}\int_y^{y+\theta} \psi_{h-1}(v+z)\,dz - \frac{2}{\theta}\int_y^{y+\theta} \varphi_{h-1}(v+z)\,dz + 2\theta'$$
$$= \psi_h(v+y) - 2\varphi_h(v+y) + 2\theta',$$

womit alles bewiesen ist.

Hilfssatz 2. *Es sei h ganz $\geqq 1$, $0<\theta<1$; $\psi_0(v)$ erfülle Voraussetzung B und sei im Intervall $0<v<1$ monoton-nichtabnehmend. Ist $h\theta \geqq 1$, so sei $\varphi_0(v)$ für jedes v gleich Null; ist $h\theta<1$, so sei $\varphi_0(v)$ die Funktion mit der Periode 1, die im Intervall $0 \leqq v \leqq h\theta$ den Wert $h\theta-1$, im Intervall $h\theta<v<1$ den Wert $h\theta$ hat. Wird*

$$\psi_p(v) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} \psi_{p-1}(v+y)\,dy; \qquad \varphi_p(v) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} \varphi_{p-1}(v+y)\,dy$$
$$(1 \leqq p \leqq h)$$

gesetzt, so ist für jedes reelle v

$$\psi_0(v) \leqq \psi_h(v) - 2\varphi_h(v) + 2h\theta. \tag{6}$$

Beweis. Man braucht im vorigen Hilfssatz nur $\theta' = h\theta$, $y=0$ zu setzen.

Hilfssatz 3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt; es sei h ganz $\geqq 2\varrho$ und $<2\varrho+1$; es sei $t \geqq 3$, $\theta = \frac{1}{\pi(t-2)}$; die Funktion*

$\psi_0(v)$ erfülle Voraussetzung B und sei im Intervall $0 < v < 1$ monoton-nichtabnehmend, und es werde gesetzt:

$$\psi_p(v) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} \psi_{p-1}(v+y)\,dy \qquad (p \geqq 1). \tag{7}$$

Behauptungen:

$$\left|\sum_{n=a}^{b} \psi_h(f(n))\right| < 6B\log(1+t) + 4\sum_{\nu=1}^{l} C_\nu t^{\varrho_\nu} + 2\sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma\left(1+\frac{1}{\tau_\sigma}\right); \tag{8}$$

$$\sum_{n=a}^{b} \psi_0(f(n)) < 18B\log(1+t) + 12\sum_{\nu=1}^{l} C_\nu t^{\varrho_\nu} + 6\sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma\left(1+\frac{1}{\tau_\sigma}\right) + 8\frac{(\varrho+1)(b-a)}{t}; \tag{9}$$

$$\sum_{n=a}^{b} \psi_0(f(n)) < 18(l+2)(\varrho+1)\left\{B\log\left(3+\frac{b-a}{B}\right) + \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu^{\frac{1}{1+\varrho_\nu}}(b-a)^{\frac{\varrho_\nu}{1+\varrho_\nu}}\right\} + 6\sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma\left(1+\frac{1}{\tau_\sigma}\right). \tag{10}$$

Beweis. I. Da die Funktion $\psi_0(v)$ Voraussetzung B erfüllt, ist sie überall mit Ausnahme höchstens abzählbar unendlich vieler Punkte in eine Fouriersche Reihe

$$\psi_0(v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' q_m e^{2m\pi i v}$$

entwickelbar mit

$$q_m = \int_0^1 e^{-2m\pi i v}\psi_0(v)\,dv;$$

der Strich bezeichnet, daß m nicht den Wert Null annimmt (wegen $q_0 = 0$). Nach dem Mittelwertsatz ist für jedes ganze $m \neq 0$

$$|q_m| < \frac{1}{|m|}.$$

Nach (7) ist dann für jedes v und jedes $p \geqq 1$

$$\psi_p(v) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' q_m\left(\frac{e^{2m\pi i\theta}-1}{2m\pi i\theta}\right)^p e^{2m\pi i v},$$

also

$$\psi_h(v) = \sum_{-\infty}^{\infty}{}' Q_m e^{2m\pi i v} \quad \text{mit} \quad Q_m = q_m\left(\frac{e^{2m\pi i\theta}-1}{2m\pi i\theta}\right)^h,$$

somit

$$(11)\quad |Q_m| \leqq |q_m| < \frac{1}{|m|} \quad \text{und} \quad |Q_m| \leqq |q_m| \cdot \left(\frac{1+1}{2\,|m|\,\pi\theta}\right)^h < \frac{1}{(\pi\theta)^h\,|m|^{h+1}}.$$

Es ist dann

$$(12)\qquad \Big|\sum_{n=a}^{b} \psi_h(f(n))\Big| \leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |Q_m| \cdot \Big|\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i m f(n)}\Big|;$$

die Reihe in der rechten Seite konvergiert wegen $h+1 \geqq 2$ und

$$\Big|\sum_{n=a}^{b}\Big| \leqq b-a+1.$$

In den Gliedern mit positivem m können wir unmittelbar (1) anwenden; um die Glieder mit negativem m behandeln zu können, ersetze ich in (1) i durch $-i$, m durch $-m$. Ich erhalte dann, daß für jedes ganze $m \neq 0$ die Ungleichung

$$\Big|\sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i m f(n)}\Big| < B + \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \varrho_\nu |m|^{\varrho_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma |m|^{-\tau_\sigma}$$

gilt, also nach (12)

$$(13)\quad \Big|\sum_{n=a}^{b} \psi_h(f(n))\Big| \leqq \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |Q_m| \cdot \Big\{B + \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \varrho_\nu |m|^{\varrho_\nu} + \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma |m|^{-\tau_\sigma}\Big\};$$

da $h \geqq 2\varrho$, also größer als die größte Zahl ϱ_ν ist, folgt aus (11) die Konvergenz der Reihe in der letzten Seite.

Wegen

$$\sum_{m=1}^{m \leqq t-1} \frac{1}{m} \leqq 1 + \int_1^t \frac{du}{u} = 1 + \log t < 2\log(1+t),$$

$$\frac{1}{(\pi\theta)^h} \sum_{m > t-1} \frac{1}{m^{h+1}} < (t-2)^h \int_{t-2}^{\infty} \frac{du}{u^{h+1}} = \frac{1}{h} \leqq 1 < \log(1+t),$$

und (11) ist

$$(14)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |Q_m| < 2\{2\log(1+t) + \log(1+t)\} = 6\log(1+t).$$

Weiterhin ist wegen $\varrho_\nu > 0$

$$\varrho_\nu \sum_{m=1}^{m \leqq t-1} m^{\varrho_\nu - 1} \leqq \varrho_\nu \int_0^t u^{\varrho_\nu - 1}\, du = t^{\varrho_\nu}$$

und wegen $h \geqq 2\varrho_\nu$

$$\frac{\varrho_\nu}{(\pi\theta)^h} \sum_{m > t-1} m^{\varrho_\nu - 1 - h} \leqq \varrho_\nu (t-2)^h \int_{t-2}^{\infty} u^{\varrho_\nu - 1 - h}\, du$$

$$= \varrho_\nu (t-2)^h \cdot \frac{(t-2)^{\varrho_\nu - h}}{h - \varrho_\nu} < t^{\varrho_\nu},$$

also nach (11)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |Q_m| \varrho_\nu |m|^{\varrho_\nu} < 2(t^{\varrho_\nu} + t^{\varrho_\nu}) = 4t^{\varrho_\nu}. \tag{15}$$

Schließlich ist wegen (11) und $\tau_\sigma > 0$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' |Q_m| \cdot |m|^{-\tau_\sigma} < 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\tau_\sigma}} < 2\left\{1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{1+\tau_\sigma}}\right\} = 2\left(1 + \frac{1}{\tau_\sigma}\right). \tag{16}$$

Aus (13), (14), (15) und (16) folgt (8).

II. Ist $h\theta \geqq 1$, so sei $\varphi_0(v)$ für jedes v gleich null; ist $h\theta < 1$, so sei $\varphi_0(v)$ die Funktion mit der Periode 1, die im Intervall $0 \leqq v \leqq h\theta$ den Wert $h\theta - 1$, im Intervall $h\theta < v < 1$ den Wert $h\theta$ hat; es werde

$$\varphi_p(v) = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} \varphi_{p-1}(v+y)\,dy \qquad (p \geqq 1)$$

gesetzt. Wegen

$$\int_0^1 \varphi_0(v)\,dv = 0$$

erfüllt $\varphi_0(v)$ Voraussetzung B, und $\varphi_0(v)$ ist im Intervall $0 < v < 1$ monoton nicht-abnehmend, so daß nach I Ungleichung (8) auch mit φ_h statt ψ_h gilt, d. h. es ist

$$\left|\sum_{n=a}^{b} \varphi_h(f(n))\right| < 6B\log(1+t) + 4\sum_{\nu=1}^{l} C_\nu t^{\varrho_\nu} + 2\sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma\left(1 + \frac{1}{\tau_\sigma}\right). \tag{17}$$

Da die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt sind, gilt (6). Außerdem ist

$$\sum_{n=a}^{b} 2h\theta = 2h\theta(b-a+1) \tag{18}$$
$$< 2\cdot(2\varrho+1)\cdot\frac{1}{\pi(t-2)}\cdot 2(b-a) < \frac{8(\varrho+1)(b-a)}{t}.$$

Aus (6), (8), (17) und (18) folgt (9).

III. Jetzt kommt es darauf an, die Zahl t geeignet zu wählen. Zwar ist Ungleichung (9) nur bewiesen unter der Voraussetzung, daß $t \geqq 3$ ist, aber sie ist trivial, falls $0 < t < 3$ ist, da dann

$$\sum_{n=a}^{b} \psi_0(f(n)) \leqq b - a + 1 \leqq 2(b-a) < 8\,\frac{(\varrho+1)(b-a)}{t}$$

ist. Wir können also in (9) dem t jeden positiven Wert geben. Da die größte der Zahlen

$$B\log(3+t) \quad \text{und} \quad C_\nu t^{\varrho_\nu} \qquad (1 \leqq \nu \leqq l)$$

eine positive stetige Funktion von t bezeichnet, die mit t unbegrenzt wächst, können wir die positive Zahl t so wählen, daß diese größte Zahl gleich

$$\frac{b-a}{t}$$

ist, und dann ist wegen $18+12l \leqq 18(1+l) \leqq 18(\varrho+1)(1+l)$

$$(19) \qquad \sum_{n=a}^{b} \psi_0(f(n)) < 6 \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma \left(1+\frac{1}{\tau_\sigma}\right) + 18(\varrho+1)(l+2)\cdot\frac{b-a}{t}.$$

Es sind jetzt zwei verschiedene Fälle möglich.

1. Es ist

$$B\log(3+t) = \frac{b-a}{t}.$$

Dann ist

$$t < t\log(3+t) = \frac{b-a}{B},$$

also

$$\frac{b-a}{t} = B\log(3+t) < B\log\left(3+\frac{b-a}{B}\right),$$

so daß aus (19) folgt:

$$\sum_{n=a}^{b} \psi_0(f(n)) < 6 \sum_{\sigma=1}^{s} D_\sigma \left(1+\frac{1}{\tau_\sigma}\right) + 18(\varrho+1)(l+2)\,B\log\left(3+\frac{b-a}{B}\right).$$

Hieraus ergibt sich, daß (10) in diesem Falle gilt.

2. Bei geeignet gewähltem ν $(1 \leqq \nu \leqq l)$ ist

$$C_\nu t^{\varrho_\nu} = \frac{b-a}{t};$$

dann ist

$$\frac{b-a}{t} = \left\{\frac{b-a}{t}\right\}^{\frac{\varrho_\nu}{1+\varrho_\nu}} \cdot \left\{C_\nu t^{\varrho_\nu}\right\}^{\frac{1}{1+\varrho_\nu}} = C_\nu^{\frac{1}{1+\varrho_\nu}} (b-a)^{\frac{\varrho_\nu}{1+\varrho_\nu}}$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu^{\frac{1}{1+\varrho_\nu}} (b-a)^{\frac{\varrho_\nu}{1+\varrho_\nu}},$$

so daß auch in diesem Falle (10) aus (19) folgt.

Beweis von Satz 1. Wir werden zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $\psi(v)$ im Intervall $0 \leqq v \leqq 1$ monoton-nichtabnehmend oder monoton-nichtzunehmend ist.

1. Es sei $\psi(v)$ im Intervall $0 < v < 1$ monoton-nichtabnehmend. Dann gilt (10) mit $\psi_0 = \psi$. Aber Ungleichung (10) gilt auch mit

$\psi_0(v) = -\psi(-v)$ und mit $-f(u)$ statt $f(u)$; denn die Funktion $-\psi(-v)$ erfüllt gleichfalls Voraussetzung B und ist im Intervall $0 < v < 1$ auch monoton-nichtabnehmend. Hieraus folgt, daß jede der Summen

$$\sum_{n=a}^{b} \psi(f(n)) \quad \text{und} \quad -\sum_{n=a}^{b} \psi(f(n))$$

kleiner ist als die rechte Seite von (10), womit (2) bewiesen ist.

2. Es sei $\psi(v)$ im Intervall $0 < v < 1$ monoton-nichtzunehmend. Dann ist $-\psi(v)$ im Intervall $0 < v < 1$ monoton-nichtabnehmend, so daß (2) mit $-\psi(v)$ statt $\psi(v)$ bewiesen ist.

Hiermit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 3. August 1927.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

(Zweite Mitteilung[1].)

Von

Vojtěch Jarník in Göttingen.

Es sei dauernd $x > 0$ ganz, $k \geqq 5$ ganz, $Q(u) = \sum_{\mu,\nu=1}^{k} a_{\mu\nu} u_\mu u_\nu$ sei eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten (d. h. $a_{\mu\mu}$ und $2a_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ seien ganz) und mit der Determinante D. Ich setze

$$F(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1 = \frac{\pi^{k/2} x^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\sqrt{D}} + \mathsf{P}(x),$$

$$M = \frac{\pi^{k/2}}{2\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}}.$$

Bekanntlich gilt[2])

$$\mathsf{P}(x) = O(x^{k/2-1}), \qquad \mathsf{P}(x) = \Omega(x^{k/2-1}),$$

ersteres sogar auch bei stetig wachsendem x. In der Ω-Richtung habe ich bewiesen[3]) ($c_1, c_2, \ldots$ seien in dieser Note positive Zahlen, die nur von der Form $Q(u)$ abhängen):

Es gibt eine Zahl $c_1 > 0$, so daß jede der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(x) > (M + c_1) x^{k/2-1}, \qquad \mathsf{P}(x) < (M - c_1) x^{k/2-1}$$

für unendlich viele natürliche Zahlen x erfüllt ist.

---

[1]) Vgl. die erste Mitteilung, Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 154—160; weiter mit I zitiert.

[2]) Nähere Literaturangaben siehe in I.

[3]) In I.

In der vorliegenden Note will ich nun aus diesem Satz folgenden schärferen Satz ableiten[4]):

Satz. *Es gibt zwei Zahlen* $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ *und drei ganze nur von der Form* $Q(u)$ *abhängige Zahlen* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $N > 0$, *so daß*

$$\mathsf{P}(x) > (M + c_2)\, x^{k/2-1} \tag{1}$$

für alle x *mit* $x > c_3$, $x \equiv A_1 \pmod N$,

$$\mathsf{P}(x) < (M - c_2)\, x^{k/2-1} \tag{2}$$

für alle x *mit* $x > c_3$, $x \equiv A_2 \pmod N$.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1[5]). *Es sei* $x > 0$ *ganz; dann ist*

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} = \frac{2}{k} x^{k/2} + \frac{1}{2} x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

Beweis. Es sei $\chi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$, wenn u nicht ganz; $\chi(u) = 0$ für u ganz; dann gibt die Eulersche Summenformel

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} = \frac{1}{2} x^{k/2-1} + \int_0^x u^{k/2-1}\, du + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \int_0^x u^{k/2-2}\, \chi(u)\, du$$

$$= \frac{1}{2} x^{k/2-1} + \frac{2}{k} x^{k/2} + O(x^{k/2-2}).$$

Hilfssatz 2. *Es seien* x, p, q *ganz und positiv;* $(p, q) = 1$, $q > 1$. *Wir setzen noch*

$$x = Lq + R,$$

wo $L = L(x, q)$ *ganz,* $R = R(x, q)$ *ganz,* $0 \leqq R < q$. *Endlich sei*

$$C = C(p, q, x) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r\, e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}};$$

dann behaupten wir:

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}\, e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = C x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

---

[4]) Wegen seiner Beziehungen zu anderen Ergebnissen vgl. die Einleitung und Bemerkungen in I und den § 3 der vorliegenden Note.

[5]) Die Zeichen O, o sind stets in bezug auf $x \to +\infty$ zu verstehen; Gleichmäßigkeit in bezug auf evtl. vorkommende Parameter wird *nicht* behauptet.

Vorbemerkung. Man beachte, daß bei festen p, q die Größe C nur von der Restklasse von x modulo q abhängt.

Beweis.

$$\sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{r=0}^{q-1} (lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + \sum_{r=0}^{R} (Lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}}.$$

Hier ist

$$(2) \qquad \sum_{r=0}^{R} (Lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = x^{k/2-1} \sum_{r=0}^{R} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + O(x^{k/2-2}).$$

Weiter ist bei festem r mit $0 \leqq r < q$

$$\sum_{0}^{L-1} (lq+r)^{k/2-1} = \sum_{l=1}^{L-1} (lq)^{k/2-1} + \left(\frac{k}{2}-1\right) \sum_{l=1}^{L-1} r (lq)^{k/2-2} + O \sum_{l=1}^{L-1} (lq)^{k/2-3} + O(1)$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} (lq)^{k/2-1} + \frac{r}{q} x^{k/2-1} + O(x^{k/2-2}).$$

Daher ist $\left(\text{wegen } \sum_{r=0}^{q-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = 0\right)$

$$(3) \qquad \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{r=0}^{q-1} (lq+r)^{k/2-1} e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{q} \sum_{r=0}^{q-1} r\, e^{-2\pi i r \frac{p}{q}} + O(x^{k/2-2}).$$

Aus (1), (2), (3) folgt aber die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Es seien x, p, q ganz und positiv; $(p, q) = 1$, $q > 1$, $0 < p < q$,*

$$s = s(p, q) = \operatorname{Max}\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{q-p}\right).$$

Dann ist

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq s \cdot x^{k/2-1}.$$

Beweis. Für $m_2 \geqq m_1$, m_1, m_2 ganz ist

$$\left| \sum_{n=m_1}^{m_2} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq \frac{1}{\left| \sin \pi \frac{p}{q} \right|} \leqq \frac{s}{2};$$

also durch partielle Summation

$$\left| \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq s \cdot x^{k/2-1}.$$

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Es ist[6])

$$F(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}} \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1}$$

$$+ \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{D}} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} + O(x^{k/4} \log x);$$

dabei ist

$$S_{p,q} = \sum_{(m)=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{p}{q} Q(m)}$$

und $\sum'$ bedeutet, daß nur über die p mit $(p, q) = 1$ summiert wird. Nach Hilfssatz 1 ist also

$$\mathsf{P}(x) = M x^{k/2-1} + \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} + o(x^{k/2-1}).$$

Wir setzen

$$\frac{\mathsf{P}(x) - M x^{k/2-1}}{x^{k/2-1}} = \mathsf{P}_1(x);$$

wir wissen, daß jede der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}_1(x) > c_1, \qquad \mathsf{P}_1(x) < -c_1 \tag{4}$$

unendlich oft erfüllt ist[7]).

Es ist[8])

$$|S_{p,q}| < c_4 q^{k/2};$$

also ist nach Hilfssatz 3 für jedes ganze d mit $2 < d < \sqrt{x}$

$$\left| \sum_{d \leqq q \leqq \sqrt{x}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} \sum_{n=0}^{x} n^{k/2-1} e^{-2\pi i n \frac{p}{q}} \right| \leqq c_4 x^{k/2-1} \sum_{d \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{q^{k/2}} \sum_{p=0}^{q-1}{}' s$$

$$\leqq c_5 x^{k/2-1} \sum_{d \leqq q \leqq \sqrt{x}} \frac{\log q}{q^{k/2-1}} \leqq \frac{c_6}{d^{1/4}} x^{k/2-1}.$$

---

[6]) E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 126—132, Formel (4).

[7]) „unendlich oft“ bedeutet: für unendlich viele natürliche Zahlen x.

[8]) E. Landau, loc. cit. [6]), Formel (12).

Nach Hilfssatz 2 ist also

$$\mathsf{P}_1(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q < d} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} C(p, q, x) + \frac{\varphi(x)}{d^{1/4}} + \psi(x),$$

wo $|\varphi(x)| < c_7$; $\psi(x) = o(1)$.

Wir wählen nun $d = c_8$ so, daß $\frac{c_7}{d^{1/4}} < \frac{c_1}{8}$ und dann ein c_3 so, daß (bei $d = c_8$) gilt $|\psi(x)| < \frac{c_1}{8}$ für $x > c_3$. Wir setzen noch

$$\mathsf{P}_2(x) = \frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{2 \leqq q < c_8} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q}}{q^k} C(p, q, x).$$

Wegen (4) ist unendlich oft $\mathsf{P}_1(x) > c_1$, also auch unendlich oft $\Re\,\mathsf{P}_2(x) > \frac{3}{4} c_1$. Wir nehmen ein ganzes positives $x = A_1$ mit $\Re\,\mathsf{P}_2(A_1) > \frac{3}{4} c_1$; nach der Vorbemerkung zum Hilfssatz 2 ist aber $\mathsf{P}_2(x)$ nur von der Restklasse abhängig, in welcher sich x modulo $N = (c_8 - 1)!$ befindet; also ist für alle $x \equiv A_1 \pmod N$ die Ungleichung $\Re\,\mathsf{P}_2(x) > \frac{3}{4} c_1$ erfüllt; für alle $x \equiv A_1 \pmod N$ mit $x > c_3$ gilt also

$$\mathsf{P}_1(x) > \frac{1}{2} c_1, \quad \text{also} \quad \mathsf{P}(x) > \left(M + \frac{c_1}{2}\right) x^{k/2-1},$$

womit die erste Hälfte des Hauptsatzes bewiesen ist. Aus der unendlich oft richtigen Ungleichung $\mathsf{P}_1(x) < -c_1$ folgt dann ebenso die andere Hälfte.

§ 3.

Schlußbemerkungen.

Wegen der trivialen Beziehung[9])

$$\mathsf{P}(x-1) - \mathsf{P}(x-0) \sim 2 M x^{k/2-1}$$

kann man unseren Hauptsatz auch folgendermaßen formulieren:

Es gibt fünf positive, nur von $Q(u)$ abhängige Zahlen $\lambda, c_9, A_1, A_2, N$ mit A_1, A_2, N ganz, $\lambda > M$, so daß $\mathsf{P}(x) > \lambda x^{k/2-1}$ für alle $x > c_9$ mit $x \equiv A_1 \pmod N$, $\mathsf{P}(x-0) < -\lambda x^{k/2-1}$ für alle $x > c_9$ mit $x \equiv A_2 + 1 \pmod N$.

Trivial war nur[10]), daß für jedes $\lambda < M$ mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\mathsf{P}(x) > \lambda x^{k/2-1}, \qquad \mathsf{P}(x-0) < -\lambda x^{k/2-1}$$

[9]) Vgl. I, Formel (4).

[10]) Vgl. I, Bemerkungen.

unendlich oft erfüllt ist. Darüber hinaus haben wir gezeigt: 1. das unendliche Auftreten von *jeder* dieser beiden Ungleichungen, und zwar 2. mit einem $\lambda > M$, [11]) und zwar 3. bei „mehr als $0\,^0/_0$“ von natürlichen Zahlen x, ja sogar 4. in ganzen arithmetischen Progressionen.

Einige von diesen Ergebnissen sind schon früher von den Herren Landau, Müntz, Walfisz und Petersson[12]) bewiesen worden. Wenn insbesondere $Q(u) = \sum_{\mu=1}^{k} u_\mu^2$, so sind die $S_{p,q}$ Potenzen von Gaußschen Summen, also bekannte Größen. In diesem Spezialfall sind unsere Resultate bereits von Herrn Petersson[13]) vollständig bewiesen worden.

Göttingen, den 14. Dezember 1927.

---

[11]) Allzu groß darf λ wegen $\mathrm{P}(x) = O(x^{k/2-1})$ sicher nicht sein.

[12]) Vgl. die Literaturangaben in I und dazu noch: H. Petersson, Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Abhandlungen a. d. math. Seminar Hamburg **5** (1927), S. 116—150.

[13]) loc. cit. [12]).

(Eingegangen am 17. Dezember 1927.)

Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems[1].

Von

Juljusz Schauder in Lwów.

Satz I. Ist $f(x)$ eine im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ erklärte und daselbst mit der α-ten Potenz des Betrages ($\alpha \geqq 1$) im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion, so ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)|^\alpha \, dx = 0, \tag{1}$$

wo $\{\varphi_i(x)\}$ das Haarsche Orthogonalsystem[2] und $\{c_i\}$ die „Fourier-Koeffizienten“

$$c_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

bezeichnen.

Beweis. [Wir werden im folgenden $s_n[f]$ oder, noch kürzer, s_n statt $\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ schreiben und werden meistenteils die selbstverständliche Variable x unterdrücken.]

Wie Herr Haar bereits gezeigt hat[3], zerfällt das Intervall $\langle 0\ 1\rangle$ in $m\,(n)$ Teilintervalle $\langle a_0, a_1\rangle$, $\langle a_1, a_2\rangle, \ldots, \langle a_{m-1}, a_m\rangle$, so daß $s_n[f]$ innerhalb eines jeden Teilintervalles konstant ist; genauer ist

$$s_n[f] = \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx}{a_{k+1} - a_k} \tag{3}$$

für $a_k < x < a_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

[1]) Die hier in Frage kommende Eigenschaft habe ich in einer früheren Arbeit, Math. Zeitschr. **26**, S. 430, Zeile 1–4 benutzt; hier soll der Beweis nachgetragen werden. Vorliegende Note tritt an Stelle der in der dortigen Korrekturanmerkung *), S. 430 angekündigten französischen Publikation.

[2]) A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1909, Kap. III, §§ 1–3.

[3]) A. Haar, loc. cit. § 2, vorletzter Satz [S. 44].

Daraus folgt

$$(4)\qquad \int_0^1 |s_n|^\alpha dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |s_n|^\alpha dx = \sum_{k=0}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \cdot \left| \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} f\,dx}{a_{k+1} - a_k} \right|^\alpha .$$

Die Cesàro-Höldersche Ungleichung für Integrale liefert aber:

$$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\,dx \right|^\alpha \leqq |a_{k+1} - a_k|^{\alpha-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f|^\alpha dx,$$

was mit (4)

$$(5)\qquad \int_0^1 |s_n|^\alpha dx \leqq \int_0^1 |f|^\alpha dx$$

ergibt.

Der zu beweisende Satz ist nun sicher richtig, wenn die Funktion $f(x)$ beschränkt ist; dann gilt nämlich nicht nur die Haarsche Beziehung[3])

$$1.\qquad \lim_{n\to\infty} s_n[f] = f \quad \text{fast überall in } \langle 0\,1\rangle,$$

sondern auch, wie aus (3) zu entnehmen ist,

$$2.\qquad \operatorname{Max} |s_n[f]| \leqq \operatorname{Max} |f| = \text{Const} = C\ ^4) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und demzufolge

$$\bar{1}.\qquad \lim_{n\to\infty} |s_n - f|^\alpha = 0 \quad \text{fast überall in } \langle 0\,1\rangle,$$

$$\bar{2}.\qquad \operatorname{Max} |s_n - f|^\alpha \leqq (2C)^\alpha,$$

wo C weder von n noch von x abhängt; nun gestattet 2. bei $\{|s_n - f|^\alpha\}$ die Reihenfolge der Operationen „$\lim_{n\to\infty}$“ und „$\int_0^1 \ldots dx$“ zu vertauschen[5]) und aus $\bar{1}$. den angestrebten Satz zu erhalten.

Liegt aber der allgemeine Fall vor, so gibt es zu jedem positiven ε ein Funktionenpaar $f_1(x)$, $f_2(x)$ derart, daß

$$(6)\qquad f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$(7)\qquad \int_0^1 |f_2|^\alpha dx < \varepsilon,$$

$f_1(x)$ aber in $\langle 0\,1\rangle$ beschränkt ist; (5) mit (7) gibt

$$(8)\qquad \int_0^1 |s_n[f_2]|^\alpha dx < \varepsilon.$$

---

[4]) Max bedeutet hier die obere Grenze der Funktion in $\langle 0\,1\rangle$.

[5]) H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire. Annali di Matematica, Dritte Reihe, 7 (1902), S. 231–359 und S. 259–260.

Jetzt wenden wir die Minkowskische Ungleichung für Integrale zweimal an:

$$(9)\quad \left(\int_0^1 |f-s_n[f]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_0^1 |(f_1-s_n[f_1])+(f_2-s_n[f_2])|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqq \left(\int_0^1 |f_1-s_n[f_1]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_0^1 |f_2-s_n[f_2]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqq \left(\int_0^1 |f_1-s_n[f_1]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_0^1 |f_2|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\int_0^1 |s_n[f_2]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Die Bemerkung über beschränkte Funktionen, wie $f_1(x)$ eine ist, zusammen mit (7), (8) und (9) liefert ohne weiteres

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |f-s_n[f]|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 2\,\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$$

oder

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |f-s_n[f]|^\alpha dx < 2^\alpha \varepsilon,$$

woraus — da ε positiv, sonst aber beliebig — die Behauptung (1) unmittelbar folgt.

Satz II. Sei Ω ein zusammenhängendes, beschränktes, ebenes Gebiet vom Lebesgueschen Maß Eins. Es gibt ein in Bezug auf Ω orthogonales, normiertes und vollständiges System $\{\varphi_i(x, y)\}$, welches für die in Ω erklärten, mit der α-ten Potenz ihres Betrages ($\alpha \geqq 1$) über Ω doppelt integrierbaren Funktionen $f(x, y)$ dasselbe leistet, wie das Haarsche System für analoge Funktionen einer Variablen in $\langle 0\,1\rangle$ gemäß Satz I.

Beweis. F. Riesz hat folgendes Übertragungsprinzip formuliert[6]): „Ist eine meßbare Menge M von beliebiger Dimension und vom Inhaltsmaße m gegeben, so kann man diese Menge *im wesentlichen eineindeutig* auf eine Strecke von der Länge m derart abbilden, daß jeder meßbaren Teilmenge der einen Menge eine meßbare Teilmenge der anderen Menge, und zwar von gleichem Inhaltsmaße, entspreche. Der Ausdruck „*im wesentlichen eineindeutig*" ist folgendermaßen zu verstehen: Für jede der beiden Mengen bilden jene Punkte, denen in der andern Menge kein Punkt oder mehr als ein Punkt zugeordnet wird, je eine Nullmenge."

F. Riesz hat dieses Prinzip ohne Begründung angegeben, man bemerke aber, daß die Peanosche Kurve eine Abbildung des Quadrates auf eine Strecke liefert; diese Abbildung ist von der eben beschriebenen Art. Liegt also ein beschränktes, ebenes Gebiet Ω vom Maße 1 vor, so bildet man zunächst das Ω enthaltende Quadrat im wesentlichen eineindeutig

[6]) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen 69 (1910), § 16.

auf eine Strecke vermittels der Peanoschen Kurve ab, dabei werden die Maße erhalten und Ω geht in eine beschränkte lineare Menge vom Maße 1 über. Diese lineare Menge E hat man nun im wesentlichen eineindeutig auf die Strecke $\langle 0\,1\rangle$ unter Erhaltung des Maßes abzubilden; dazu genügt es, einem jeden Punkt von E als Bild diese Stelle in $\langle 0\,1\rangle$ zuzuordnen, deren Abszisse gleich dem Maße der links vom gegebenen Punkt befindlichen Teilmenge von E ist.

Durch Zusammensetzung beider Abbildungen erhält man eine im wesentlichen eineindeutige, das Lebesguesche Maß erhaltende Abbildung von Ω auf die Strecke $\langle 0\,1\rangle$.

Vermittels dieser Abbildung liefert nun eine jede Haarsche Funktion $\varphi_i(x)$ eine in Ω definierte Funktion $\varphi_i(x, y)$ von zwei Variablen. $\{\varphi_i(x, y)\}$ ist das gesuchte Orthogonalsystem. Um den Beweis auszuführen, bemerke man, daß die Abbildung den Wert der Integrale nicht ändert. Genauer gesagt, entspricht einer Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen, die ein endliches Doppelintegral

$$\iint_{\Omega} |f(x, y)|^{\alpha} dx\, dy = J$$

besitzt, vermöge der Abbildung eine Funktion einer Variablen $f(x)$, die dem Integral

$$\int_0^1 |f(x)|^{\alpha} dx$$

denselben endlichen Wert J erteilt. Infolgedessen entsprechen sich gegenseitig die Partialsummen vom gleichen Index n der Orthogonalentwicklung von $f(x, y)$ nach $\{\varphi_i(x, y)\}$ und der Orthogonalentwicklung von $f(x)$ nach $\{\varphi_i(x)\}$, so daß die Beziehung (1) ohne weiteres in ihr zweidimensionales Analogon übergeht. Da die Integrale erhalten werden, überträgt sich auch die Normiertheit, Orthogonalität und Vollständigkeit des Haarschen Systems auf das $\{\varphi_i(x, y)\}$-System.

(Eingegangen am 31. Dezember 1927.)

Aus den Neuerscheinungen

Vorlesungen über Elektrizität. Von Professor **A. Eichenwald,** Dipl.-Ing. Petersburg, Dr. phil. nat. (Straßburg), Dr. phys. (Moskau). Mit 640 Abbildungen. VII, 664 Seiten. 1928. RM 36.—; gebunden RM 37.50

Theorien der Elektrizität. Elektrostatik. Redigiert von **W. Westphal.** Mit 112 Abbildungen. VII, 564 Seiten. 1927. RM 46.50; gebunden RM 49.—
(Band XII vom Handbuch der Physik, herausg. von H. Geiger, Kiel, und Karl Scheel, Berlin.)

Elektrizitätsbewegung in festen und flüssigen Körpern. Redigiert von **W. Westphal.** Mit 222 Abbildungen. VI, 672 Seiten. 1928. RM 55.50; gebunden RM 58.—
(Band XIII vom Handbuch der Physik, herausg. von H. Geiger, Kiel, und Karl Scheel, Berlin.)

Erdströme. Grundlagen der Erdschluß- und Erdungsfragen. Von Dr.-Ing. **Franz Ollendorff.** Mit 164 Textabbildungen. VIII, 260 Seiten. 1928. Gebunden RM 20.—

Lehrbuch der Elektrodynamik. Von Dr. **J. Frenkel,** Professor für theoretische Physik am Polytechnischen Institut in Leningrad.
Zweiter Band: **Makroskopische Elektrodynamik der materiellen Körper.** Mit 50 Abbildungen. XII, 505 Seiten. 1928. RM 45.—; gebunden RM 46.20
Früher erschien der erste Band: **Allgemeine Mechanik der Elektrizität.** Mit 39 Abbildungen. X, 365 Seiten. 1926. RM 28.50; gebunden RM 29.70

Hilfsbuch für die Elektrotechnik. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen bearbeitet und herausgegeben von Dr. **Karl Strecker.** Zehnte, umgearbeitete Auflage. **Schwachstromausgabe** (Fernmeldetechnik). Mit 1057 Abbildungen. XXI, 1137 Seiten. 1928. Gebunden RM 42.—

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Knopp, K., Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. II. Teil. Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 S. Kl.-8°. Walter de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig, 1928. (Sammlung Göschen Nr. 878.)

Bürklen, O. Th., Mathematische Formelsammlung. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von F. Ringleb. 241 S. Kl.-8°. Walter de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig, 1927. (Sammlung Göschen Nr. 51.)

Reichenbach, H., Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. VI + 380 S. Gr.-8°. Walter de Gruyter & Co., Berlin u. Leipzig, 1928.

Zacharias, M. und M. Ebner, Trigonometrie. VIII + 107 S. Gr.-8°. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M., 1928. (Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten.)

Metz, A., Une nouvelle philosophie des sciences. Le causalisme de M. Émile Meyerson. VI, 211 S. Kl.-8°. F. Alcan, Paris, 1928. (Nouvelle Collection Scientifique. Directeur: Émile Borel.)

Meyerson, É., Identité et réalité. Troisième édition. XIX, 571 S. Gr.-8°. F. Alcan, Paris, 1926.

Meyerson, É., De l'explication dans les sciences. 784 S. Gr.-8°. Payot, Paris, 1927.

Meyerson, É., La déduction relativiste. XVI, 396 S. Gr.-8°. Payot, Paris, 1925.

Bieberbach, L., Einführung in die konforme Abbildung. Zweite, neubearbeitete Ausgabe. 130 S. Kl.-8°. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig, 1927. (Sammlung Göschen Nr. 768.)

Hellinger, E., und Toeplitz, O., Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Sonderausgabe aus der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Mit einem Vorwort von E. Hilb. S. 1335—1616. Gr.-8°. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.

Balster, W., Der Fehler in der Einsteinschen Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt. Gr.-8°. 31 S. Verlag Otto Hillmann, Leipzig, 1928.

Thoma, E., Rechenbuch für höhere Lehranstalten. Ausgabe A für Knaben. Teil I. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Gr.-8°. 139 S. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M., 1928.

Thoma, E., Rechenbuch für höhere Lehranstalten. Ausgabe B für Mädchen. Teil I. Das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Gr.-8°. 118 S. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M., 1928.

Detlefs, H., Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie in drei Heften. Erstes Heft: Die Parallelprojektion auf eine Tafel. Gr.-8°. IV + 63 S. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M., 1928. (Reinhardt Zeisberg, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen.)

Detlefs, H. †, Die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie in drei Heften. Zweites Heft. Die senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln. Gr.-8°. 57 S. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M., 1928. (Reinhardt-Zeisberg, Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig